Preview di Studio di una funzione

-funzione esponenziale-

N.6.- Studiare la funzione $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ e disegnarne il grafico.

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è esponenziale e quindi il suo dominio dipende dalla funzione fratta all'esponente. Pertanto bisogna imporre la condizione che il denominatore non si annulli:

$x- 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Ne consegue che il dominio è D = R -{2}.

POSITIVITA'

$y \geq 0 \Rightarrow xe^{\frac{1}{x-2}} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ (abbiamo trascurato la funzione esponenziale che come è noto è sempre positiva)

Pertanto, la funzione è positiva per x >0, nulla in x = 0 e negativa altrimenti.

LIMITI E ASINTOTI

Risulta:

$$\lim_{x \to 2^+} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0^+}} = 2e^{+\infty} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 2^-} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0^-}} = 2e^{-\infty} = \frac{2}{e^{+\infty}} = 0$$

Pertanto la funzione ammette la retta d'equazione x = 2 per asintoto verticale.

Inoltre, dall'essere:

$$\lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \pm\infty$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} - x = (+\infty - \infty) = \lim_{x \to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x-2}} - 1) \overset{DH}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +1$$

si trae che $y = x+1$ è un asintoto obliquo.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + xe^{\frac{1}{x-2}}\frac{-1}{(x-2)^2} = e^{\frac{1}{x-2}}\left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}\right)$$

$$y' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+4 \geq 0$$

cioè la funzione è crescente per $x \leq 1, \quad x \geq 4$, e ammette un punto di massimo relativo M per $x = 1$ e un punto di minimo relativo N per $x = 4$. M(1,e^{-1}), N(4,4$e^{-1/2}$). Dato che si riesce ad accennare il grafico della funzione senza l'analisi della derivata seconda abbiamo trascurato tale analisi.
Il grafico della funzione è riportato nella figura 5.6

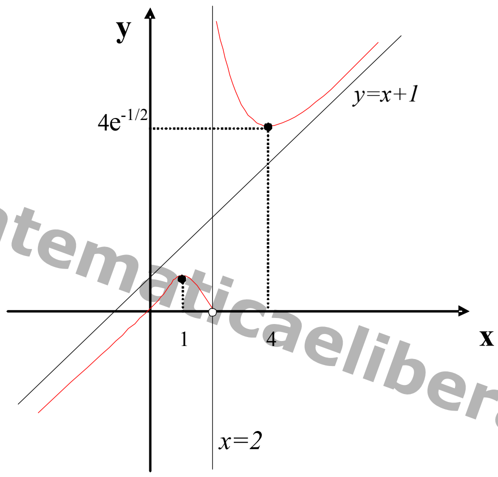

fig. 5.6