Sessione ordinaria 1970

1 Verificare che le due curve piane, grafici cartesiani delle funzioni:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \qquad y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

hanno due punti in comune.
Indicare l'andamento dei predetti grafici cercandone in particolare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.
Determinare l'area della regione piana limitata dai due archi dei grafici aventi per estremi i due punti comuni.
Considerate poi le tangenti ai due grafici nei punti comuni, calcolare l'area del quadrilatero convesso da esse determinato.

Risoluzione

Per determinare le coordinate dei punti d'intersezione delle due curve occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x+1)^3 \\ 6(x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

e quindi l'equazione:

*] $\qquad x^2 + x = 0.$

Risolta l'equazione [*] si vede che i punti richiesti sono: $P(0,1)$, $Q(-1,0)$

Studio della prima curva
La curva γ d'equazione:

1] $\qquad y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

è definita in tutto l'insieme R dei numeri reali in quanto la funzione è razionale intera, e non presenta asintoti.
Risolvendo la disequazione:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 \geq 0$$

si vede che la [1] è positiva per $x > -1$, nulla per $x = -1$ e negativa altrimenti.

La derivata prima è:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$$

e la disequazione $y' \geq 0$ ossia $3(x+1)^2 \geq 0$ è verificata per $\forall x \in R$.
Pertanto la curva è crescente per $\forall x \in R$; nel punto x = -1, annullandosi la deriva prima, presenta un flesso a tangente orizzontale.
La derivata seconda è:

$$y'' = 6(x+1)$$

e la disequazione $y'' \geq 0$ ossia $6(x+1) \geq 0$ è verificata per $x \geq -1$.
Quindi la curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse y per $x > -1$, nella direzione negativa dell'asse y per $x < -1$; $x = -1$ è un flesso: $F(-1,0)$.
Il grafico della funzione è accennato nella figura 1.

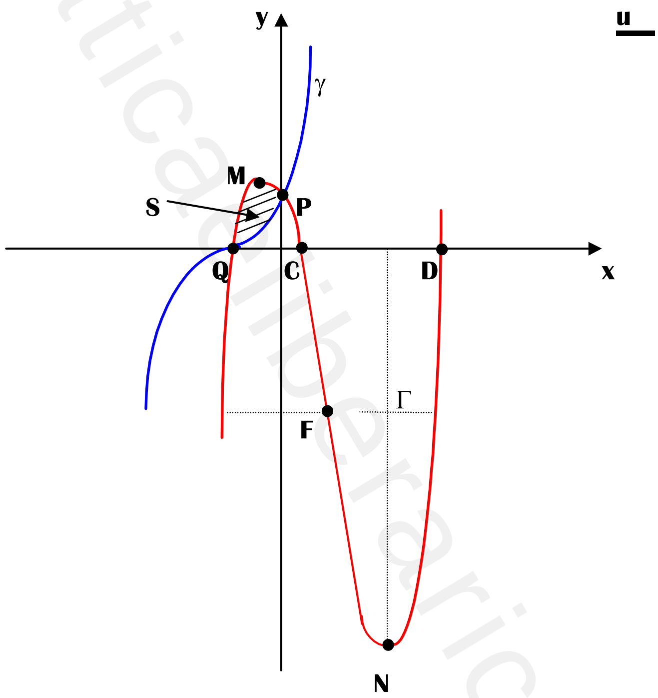

fig. 1

Studio della seconda curva
La curva Γ d'equazione:

2] $$y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

è definita in tutto l'insieme R dei numeri reali in quanto la funzione è razionale intera, e non presenta asintoti.

Risolvendo la disequazione:

$$x^3-3x^2-3x+1\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2-4x+1)\geq 0$$

si vede che la [1] è positiva per $-1<x<2-\sqrt{3}$, $x>2+\sqrt{3}$, nulla per x = -1, $x=2-\sqrt{3}$, $x=2+\sqrt{3}$ e negativa altrimenti.
La derivata prima è:

$$y'=3(x^2-2x-1)$$

e la disequazione $3(x^2-2x-1)\geq 0$ è verificata per $x\leq 1-\sqrt{2}$, $x\geq 1+\sqrt{2}$.
Pertanto la curva è crescente per $x\leq 1-\sqrt{2}$, $x\geq 1+\sqrt{2}$ e decrescente altrimenti, presenta un massimo relativo M per $x=1-\sqrt{2}$ e un minimo relativo N per $x=1+\sqrt{2}$:

$$M\left(1-\sqrt{2}, 4\sqrt{2}-4\right), \qquad N\left(1+\sqrt{2}, -4\sqrt{2}-4\right)$$

La derivata seconda è:

$$y''=6(x-1)$$

e la disequazione $6(x-1)\geq 0$ è verificata per $x \geq 1$.
Quindi la curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse y per $x > 1$, nella direzione negativa dell'asse y per $x < 1$; $x = 1$ è un flesso a tangente obliqua: F (1,- 4).
Il grafico della funzione è accennato nella figura 1.

Calcolo dell'area racchiusa tra le due curve

L'area S del triangolo mistilineo (fig. 1) MPQ è data da:

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2-3x+1)dx-\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+3x+1)dx=-6\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx=$$

$$=-6\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=1.$$

Tangenti alle due curve nei punti comuni

La generica retta passante per il punto Q(-1,0) ha equazione:

3] $\qquad y = m(x+1)$

ed è tangente alla curva d'equazione [1] (risp. [2]) se:

$$m_1=[y'(x)]_{x=-1}=\left[3(x+1)^2\right]_{x=-1}=0, \quad \left(\text{risp. } m_2=[y'(x)]_{x=-1}=\left[3(x^2-2x-1)\right]_{x=-1}=6\right)$$

Pertanto l'equazione della tangente *t* (risp. *t'*) alla curva [1] (risp. [2]) nel punto *Q* è:

4] $y = 0$, (risp. [5] $y = 6x + 6$)

Analogamente si vede che le equazioni delle tangenti *r* e *r'* alle due curve nel punto *P*(0,1) sono:

6] $y = 3x + 1$, [7] $y = -3x + 1$.

Calcolo dell'area del quadrilatero determinato dalle tangenti

Il quadrilatero convesso determinato dalle tangenti alle due curve nei punti *P*(0,1) e
Q(-1,0) ha per vertici i punti *P, R , Q , T* (fig. 2), ove *R* è il punto d'intersezione delle rette *t'* e *r'*, e *T* delle rette *t* e *r*.
Le coordinate del punto *R*, ottenute risolvendo il sistema formato dalle equazioni [5] e [7], sono (- 5/9 ; 8/3); mentre quelle del punto *T*, ottenute mettendo a sistema le [4], [6], sono (-1/3,0). L'area del quadrilatero *QTPR* può essere calcolata nel seguente modo:

$$S(QTPR) = S(QRT') - S(TPT').$$

Pertanto, osservato che:

$$S(QRT') = \frac{\overline{QT'} \cdot \overline{R'O}}{2} = \frac{16}{9}, \qquad S(TPT') = \frac{\overline{TT'} \cdot \overline{PO}}{2} = \frac{1}{3}$$

si ottiene:

$$S(QRTP) = \frac{16}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$$

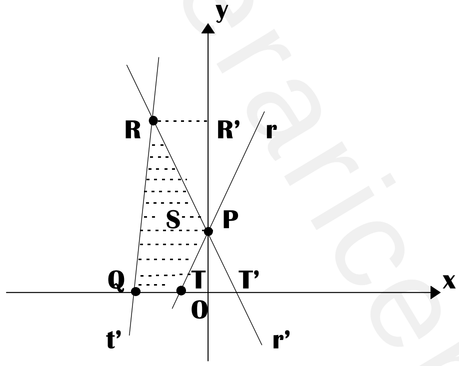

fig. 2