## 5.Ulteriori esercizi sulle disequazioni razionali di primo e secondo grado

**Esempio 15.** Risolvere la disequazione: *) $3x - 6 > 0$.
Si ha:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow \frac{3x}{3} > \frac{6}{3} \Rightarrow x > 2.$$

Le soluzioni della (*) sono, dunque, i numeri $x > 5/3$, ossia tutti i numeri reali maggiori di 5/3. La scrittura $x > 5/3$ si può sostituire con l'equivalente $x \in \left] 5/3, +\infty \right[$. Geometricamente possiamo rappresentare l'insieme soluzione della disequazione nel seguente modo:

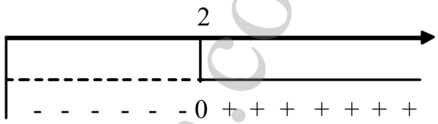

fig. 1

Giova osservare che dalla figura 1 si deduce anche che la disequazione $3x - 6 < 0$ è verificata per $x < 2$ e che l'equazione $3x - 6 = 0$ per $x = 2$ .

**Esempio 16.** Risolvere la disequazione: *) $5x + 7 < 0$.
La disequazione (*) è equivalente alla seguente $2x - 7 > 0$, moltiplicando primo e secondo membro per -1. Si ha:

$$5x + 7 < 0 \Leftrightarrow 5x < -7 \Rightarrow \frac{5x}{5} < \frac{-7}{5} \Rightarrow x < -\frac{7}{5}$$

Pertanto la disequazione (*) ammette le soluzioni $x < -\frac{7}{5}$ ovvero $x \in \left] -\infty, -\frac{7}{5} \right[$.

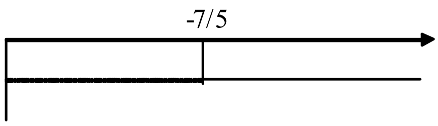

fig. 2

**Esempio 17.** Risolvere la disequazione: *) $-x > 2$.
Si ha:

$$-x > 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2.$$

Pertanto la disequazione (*) è verificata da tutti i numeri minori di 2, $x \in ]-\infty, 2[$.

**Esempio 18.** Risolvere la disequazione: *) $\frac{x+3}{2} > \frac{7+x}{3} - x$

La disequazione non è assegnata nella forma normale $ax + b > 0$. Pertanto, bisogna preliminarmente ricondurla a tale forma.
La disequazione:

$$\frac{x+3}{2} > \frac{7+x}{3} - x$$

calcolando il m.c.m. tra i denominatori, si può scrivere nel seguente modo:

$$\frac{3(x+3)}{6} > \frac{2(7+x)-6x}{6} \quad \Rightarrow \quad 3(x+3) > 2(7+x)-6x$$ [1]

ossia:

$$3x+9 > 14+2x-6x \quad \Rightarrow \quad 3x-2x+6x > 14-9 \quad \Rightarrow \quad 7x-5>0$$

da cui, risolta quest'ultima disequazione in forma normale, si ottiene:

$$7x-5>0 \quad \Rightarrow \quad 7x>5 \quad \Rightarrow \quad x>5/7.$$

**Esempio 19.** Risolvere la disequazione: *) $(x-2)^2 < 7+x^2 - \frac{2x+1}{3}$

Eseguendo le potenze si ha:

$$x^2-4x+4 < 7+x^2-\frac{2x+1}{3}$$

da cui, calcolando il m.c.m. tra i denominatori si ha:

$$\frac{3(x^2-4x+4)}{3} < \frac{3(7+x^2)}{3} - \frac{2x+1}{3}$$

ossia:

$$3x^2-12x+12 < 21+3x^2-2x-1 \quad \Rightarrow \quad -10x<8 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 10x>8 \Rightarrow x>8/10 \Rightarrow x>4/5$$

[1] Abbiamo eliminato i denominatori moltiplicando ambo i membri per 6 >0.

**Esempio 20.** Risolvere la disequazione $x\left(1+\sqrt{2}\right)+3+3\sqrt{2}<0$
Si ha:

$$x\left(1+\sqrt{2}\right)+3+3\sqrt{2}<0 \Rightarrow x\left(1+\sqrt{2}\right)<-3-3\sqrt{2} \Rightarrow x\left(1+\sqrt{2}\right)<-3(1+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)}<\frac{3(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})} \quad \Rightarrow \quad x<-3$$

**Esempio 21.** Risolvere la disequazione $x\sqrt{2}+3\sqrt{3}-x\sqrt{3}+4\sqrt{3}>2\sqrt{3}$
Si ha:

$$x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)>-3\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)>-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}<\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

da cui si ha:

$$x<\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Osserviamo che abbiamo invertito il verso della disequazione poiché abbiamo diviso primo e secondo membro per $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$.

**Esempio 22.** Risolvere la disequazione

$$\left\{x+\frac{3+x}{2}-3\left[-(x+2)+\frac{x}{3}\right]+(x-2)^2\right\}+x^2-1>\frac{x+4}{5}-1$$

Si ha:

$$\left\{x+\frac{3+x}{2}-3\left[-x-2+\frac{x}{3}\right]+x^2-4x+4\right\}+x^2-1>\frac{x+4}{5}-1+2x^2$$

$$\left\{x+\frac{3+x}{2}+3x+6-x+x^2-4x+4\right\}+x^2-1>\frac{x+4}{5}-1+2x^2$$

$$\left\{\frac{3+x}{2}-x+10+x^2\right\}+x^2-1>\frac{x+4}{5}-1+2x^2$$

$$\frac{3+x}{2}-x+10+x^2+x^2-1>\frac{x+4}{5}-1+2x^2$$

$$\frac{3+x}{2}-x+10>\frac{x+4}{5} \quad ossia \quad \frac{5(3+x)-10x+100}{10}>\frac{2(x+4)}{10}$$

$$5(3+x)-10x+100>2(x+4) \quad ossia \quad 15+5x-10x+100>2x+8$$

$$-7x>-107 \Rightarrow x<\frac{107}{7}$$

**Esempio 23.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 5x + 6 > 0$.
La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.
Il delta è: $\Delta = 1 > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ sono $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Pertanto le soluzioni della disequazione sono: $x < 2$, $x > 3$ ( fig. 3).

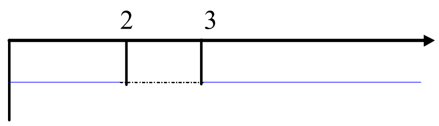


fig. 3

**Esempio 24.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 7x + 10 < 0$.
Moltiplicando 1° e 2° membro per -1 si ottiene la disequazione:

$$-x^2 + 7x - 10 > 0.$$

Osservato che $\Delta = 9 > 0$, $A = -1 < 0$, e che le soluzioni che l'equazione associata $-x^2 + 7x - 10 = 0$ ovvero $x^2 - 7x + 10 = 0$ sono $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, si deduce che le soluzioni della disequazione (*) sono: $2 < x < 5$ ( fig. 4).

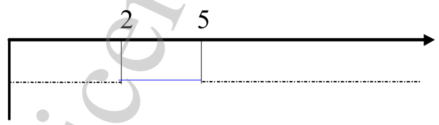


fig. 4

**Esempio 25.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 7x + 10 < 0$.
La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$.
Il delta è: $\Delta = 9 > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni dell'equazione $x^2 - 7x + 10 = 0$ sono $x_1 = 2$, $x_2 = \mathbf{5}$.
Pertanto le soluzioni della disequazione sono: $2 < x < 5$.

**Esempio 26.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 - x + 1 < 0$.
La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$.
Il delta è: $\Delta = -3 < 0$, $A = 1 > 0$
Pertanto la disequazione assegnata non ammette soluzione

**Esempio 27.** Risolvere la disequazione: *) $3x^2 - x > 0$.
La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 3$, $b = -1$, $c = 0$.
Il delta è: $\Delta > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni dell'equazione $3x^2 - x = 0$ sono $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$.
Pertanto le soluzioni della disequazione sono: $x < 0$, $x > 1/3$.

**Esempio 28.** Risolvere la disequazione: *) $2x^2 - 1 > 0$.
La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$.
Il delta è $\Delta > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni dell'equazione $2x^2 - 1 = 0$ sono $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pertanto le soluzioni della disequazione sono: $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Esempio 29.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 - x\sqrt{3} - 4 > 0$

La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = -4$.

Il delta è $\Delta = 19 > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni dell'equazione $x^2 - x\sqrt{3} - 4 = 0$ sono $x_1 = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{19}}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{2}$.

Pertanto le soluzioni della disequazione sono: $x < \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{19}}{2}$, $x > \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{2}$.

**Esempio 30.** Risolvere la disequazione: *) $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} < 0$

La disequazione di secondo grado si presenta in forma normale, con $a = 1$, $b = b = 2\left(1 + \sqrt{3}\right)$, $c = 2\sqrt{3}$

Il delta è $\dfrac{\Delta}{4} = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - (1)\left(2\sqrt{3}\right) = \left(1 + 2\sqrt{3} + 3\right) - 2\sqrt{3} = 4 > 0$ e $A = 1 > 0$; le soluzioni dell'equazione $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$ sono $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

Pertanto le soluzioni della disequazione (*) sono: $\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

**Esempio 31.** Risolvere la disequazione: *) $\dfrac{x^2 - x}{3} - 4 > 2x - \dfrac{1}{5}$.

Si ha:

$$\frac{3(x^2 - x) - 60}{15} > \frac{30x - 3}{15} \Rightarrow 3(x^2 - x) - 6 > 30x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 > 30x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 33x - 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 11x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}, \quad x > \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$$

**Esempio 32.** Risolvere la disequazione: *) $\dfrac{(2x-1)^2}{5} - 4(3x - 1) < 2x - \dfrac{4x^2 - 1}{5} + \dfrac{1}{3}x^2$.

Si ha:

$$\frac{3(2x-1)^2 - 15\left[4(3x-1)\right]}{15} < \frac{15(2x) - 3\left(4x^2 - 1\right) + 5(x^2)}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2x-1)^2 - 15\left[4(3x-1)\right] < 15(2x) - 3\left(4x^2 - 1\right) + 5(x^2) \Rightarrow$$

$$3(4x^2-4x+1)-60(3x-1)<30x-12x^2+3+5x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12x^2-12x+3-180x+60<30x-12x^2+3+5x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x^2+222x-60>0 \Rightarrow x<\frac{-11-\sqrt{12621}}{5}, x>\frac{-11+\sqrt{12621}}{5}$$

**Esempio 33.** Risolvere la disequazione:

$$*)\quad \frac{(\sqrt{3}x-1)^2}{2}-\sqrt{3}(\sqrt{2}x-1)>2x-\frac{\sqrt{3}x^2-1}{2}+\frac{x-1}{3}.$$

Si ha:

$$\frac{(\sqrt{3}x-1)^2}{2}-\sqrt{3}(\sqrt{2}x-1)>2x-\frac{\sqrt{3}x^2-1}{2}+\frac{x-1}{3}$$
$$\frac{3(\sqrt{3}x-1)^2-6\sqrt{3}(\sqrt{2}x-1)}{6}>\frac{6(2x)-3\left(\sqrt{3}x^2-1\right)+2(x-1)}{6}$$
$$3(\sqrt{3}x-1)^2-6\sqrt{3}(\sqrt{2}x-1)>6(2x)-3\left(\sqrt{3}x^2-1\right)+2(x-2)$$
$$3\left(3x^2-2\sqrt{3}x+1\right)-6\sqrt{6}x+6\sqrt{3}>12x-3\sqrt{3}x^2+3+2x-2$$
$$9x^2-6\sqrt{3}x+3-6\sqrt{6}x+6\sqrt{3}-12x+3\sqrt{3}x^2-3-2x+2>0$$
$$\left(9+3\sqrt{3}\right)x^2-\left(6\sqrt{3}-6\sqrt{6}-14\right)x+6\sqrt{3}+2>0$$

$$3\left(3+\sqrt{3}\right)x^2-2\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{6}-7\right)x+6\sqrt{3}+2>0$$
$$\frac{\Delta}{4}=\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{6}-7\right)^2-3\left(3+\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{3}+2\right)=58+42\sqrt{6}-2\left(27\sqrt{2}+51\sqrt{3}\right)<0$$
$$A=3\left(3+\sqrt{3}\right)>0$$

Quindi le soluzioni della disequazioni (*) sono $\forall x \in R$