

Limiti di una funzione

1. Nozione di limite di una funzione.

Sia $y = f(x)$ una funzione reale definita in un sottoinsieme X di R e c un punto d'accumulazione per l'insieme X .

Definizione.- Limite di $f(x)$ per x che tende a c .

Si dice che $f(x)$ tende al numero reale L per x che tende a c , o che $f(x)$ ha per limite L in c , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

se è verificata la seguente proprietà:

$$1) \quad \forall \text{ intorno } J \text{ di } L \exists \text{ un intorno } I_r \text{ di } c : \forall x \in (I - \{c\}) \cap X \quad f(x) \in J.$$

La (1) si può esprimere equivalentemente nel seguente modo:

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (]c - \delta_\varepsilon, c[\cup]c, c + \delta_\varepsilon]) \cap X \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

non appena si ricordi che un intorno I di c contiene un intervallo aperto contenente c e che la condizione $f(x) \in J$ equivale a $|f(x) - L| < \varepsilon$, ove ε è il generico raggio dell'intorno di centro L .

La proprietà (1) e quindi la (2), esprime geometricamente, in un riferimento Oxy del piano, il fatto

che i punti del grafico della funzione $f(x)$ aventi ascissa $x \in I_\varepsilon$, distinti da c , sono compresi nel rettangolo di dimensioni $2\delta_\varepsilon$ e 2ε .

Nelle figure 1 e 2 sono illustrate alcune eventualità.

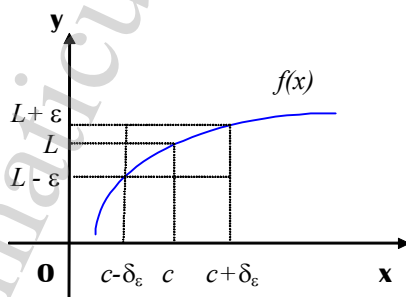


fig. 1

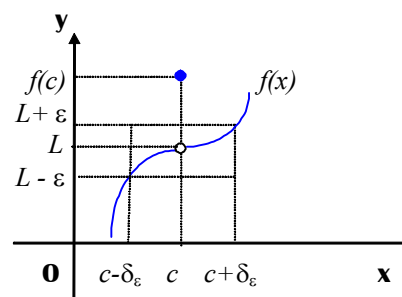


fig. 2

Casi particolari

- Se $c \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$3) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (\mathbb{R} - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon \setminus \{c\}) \cap X \quad f(x) > \varepsilon$$

e si scrive (fig. 3): $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$.

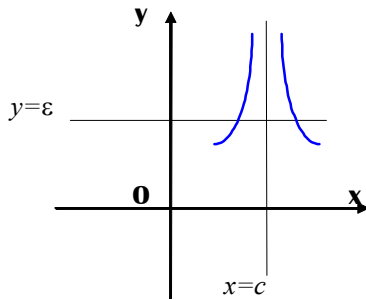


fig. 3

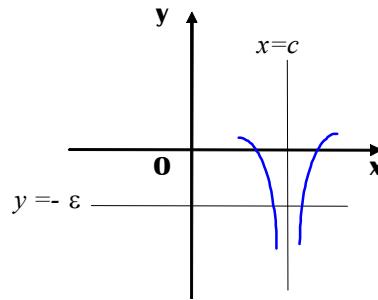


fig. 4

- Se $c \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$ la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$4) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (\mathbb{R} - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon \setminus \{c\}) \cap X \quad f(x) < -\varepsilon$$

e si scrive (fig. 4): $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$.

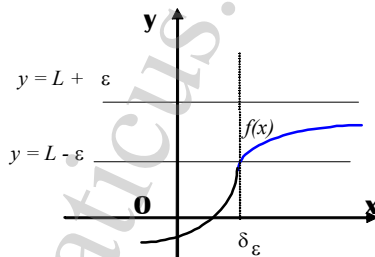


fig. 5

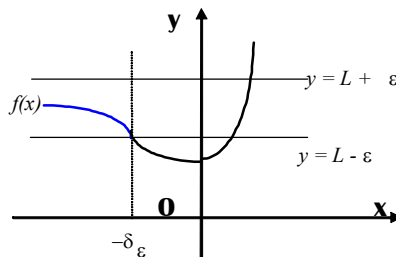


fig. 6

- Se $c = +\infty$, $L \in \mathbb{R}$ la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$5) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (\delta_\varepsilon, +\infty \setminus \{+\infty\}) \cap X \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

e si scrive (fig. 5): $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- Se $c = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$ la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$6) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(]-\infty, \delta_\varepsilon[\cap X\right) \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

e si scrive (fig. 6): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

- Se $c = +\infty$, $L = +\infty$, la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$7) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(\delta_\varepsilon, +\infty[\cap X\right) \quad f(x) > \varepsilon$$

e si scrive (fig. 7): $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Se $c = +\infty$, $L = -\infty$, la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$8) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(\delta_\varepsilon, +\infty[\cap X\right) \quad f(x) < -\varepsilon$$

e si scrive (fig. 8): $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

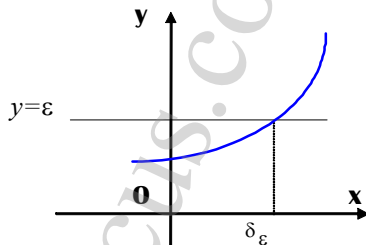


fig. 7

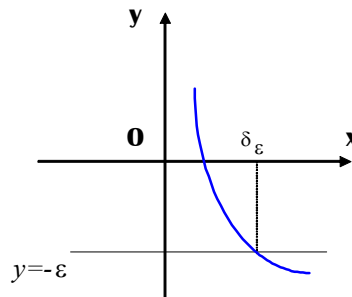


fig. 8

- Se $c = -\infty$, $L = +\infty$, la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$9) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(]-\infty, \delta_\varepsilon[\cap X\right) \quad f(x) > \varepsilon$$

e si scrive (fig. 9): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

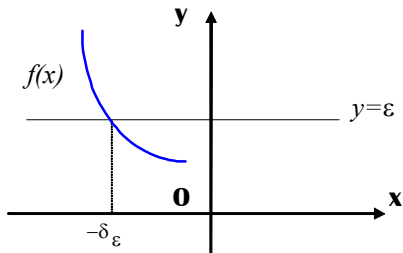


fig. 9

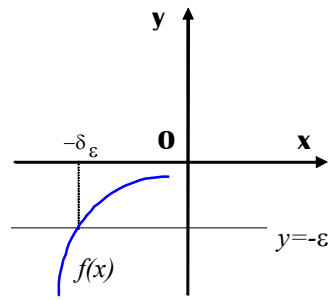


fig. 10

- Se $c = -\infty$, $L = -\infty$, la definizione di limite, ossia la proprietà (1), si può formulare nel seguente modo:

$$10) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(]-\infty, \delta_\varepsilon[\cap X\right) \quad f(x) < -\varepsilon$$

e si scrive (fig. 10): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Osservazione 1.- Limite destro e sinistro.

Se c è un punto d'accumulazione a sinistra per X e risulta:

$$11) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(]c, c + \delta_\varepsilon[\cap X\right) - \{c\} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

allora si scrive $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ e si suol dire che L è il limite della funzione per x tendente a c dalla destra cioè per valori maggiori di c ; mentre se c è un punto d'accumulazione a destra per X e risulta:

$$12) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left(]c - \delta_\varepsilon, c[\cap X\right) - \{c\} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

allora si scrive $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ e si suol dire che L è il limite della funzione per x tendente a c dalla sinistra cioè per valori minori di c .

Naturalmente si può considerare il limite destro o sinistro anche nei casi particolari precedentemente considerati.

Inoltre, se c è d'accumulazione sia a sinistra che a destra si ha l'equivalenza:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Osserviamo infine che per una funzione $f(x)$, per $x \rightarrow c$, può accadere una delle seguenti possibilità:

- esistono in c i limiti destro e sinistro e sono uguali;
- esistono in c i limiti destro e sinistro e sono distinti;
- esiste in c solo il limite destro o solo il limite sinistro;
- non esistono in c i limiti destro e sinistro.

Osservazione 2.-

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ e $f(x) > L$ (risp. $f(x) < L$) intorno a c allora si dice che per x tendente a c la funzione $f(x)$ tende ad L per valori maggiori di L (risp. minori di L) e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L^+ \quad (\text{ risp. } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L^-)$$

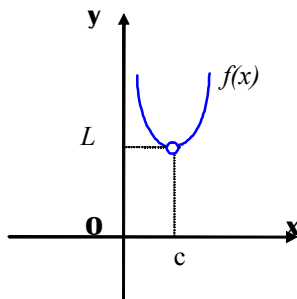


fig. 11

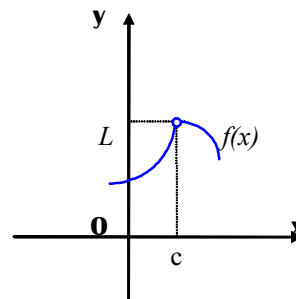


fig. 12

Nelle figure 11 e 12 abbiamo rappresentato rispettivamente le due eventualità.

Osservazione 3.-

Alcuni autori sostituiscono, nelle (5) e (6), la locuzione “ $\forall \varepsilon > 0$ ” con l’equivalente “per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e piccolo a piacere”; mentre, nei casi particolari (3), (4), (7), (8), (9) e (10) con “per ogni numero $\varepsilon > 0$ grande a piacere”.

La semplificazione adottata da questi autori è lecita.

Infatti, se “ $\forall \varepsilon > 0$, piccolo a piacere, risulta vera la proprietà:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (c - \delta_\varepsilon, c[\cap X) - \{c\} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

a maggior ragione è vera scegliendo ε grande.

Analogamente, se “ $\forall \varepsilon > 0$ grande a piacere risulta vera la proprietà

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (]-\infty, \delta_\varepsilon[\cap X) \quad f(x) > \varepsilon$$

a maggior ragione è vera scegliendo ε piccolo.