

# CAPITOLO PRIMO

## RICHIAMI PRELIMINARI

*In questo capitolo ricordiamo alcuni argomenti di matematica di base: aritmetica, algebra, polinomi e radicali.*

### 1. I numeri reali e le operazioni fondamentali.

L'insieme dei numeri reali, indicato con  $R$ , è costituito dall'unione dei seguenti insiemi numerici:

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  insieme dei numeri naturali,

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$  insieme dei numeri interi,

$Q = \{m/n \mid m, n \in Z \text{ e } n \neq 0\}$  insieme dei numeri razionali,

$R - Q = \{\text{numeri che non si possono esprimere come quoziente del tipo } m/n \text{ con } m, n \in Z \text{ e } n \neq 0\}$ .

Risulta che:

$$R = N \cup Z \cup Q \cup (R - Q) \quad \text{e} \quad N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

$Z^+$  ( $Z^-$ ) indica l'insieme dei numeri interi positivi (negativi),  $Q^+$  ( $Q^-$ ) l'insieme dei numeri razionali positivi (negativi),  $R^+$  ( $R^-$ ) l'insieme dei numeri reali positivi (negativi).

L'insieme  $R$  si può identificare con l'insieme dei punti di una retta, che viene detta asse reale (fig. 1), nel senso che ad ogni numero reale corrisponde uno ed un solo punto della retta

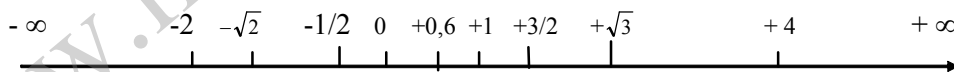


fig. 1

Il punto identificato con il numero zero si dice origine.

I simboli  $+\infty$ ,  $-\infty$ , da leggersi rispettivamente più infinito e meno infinito, indicano che la retta reale, cioè l'insieme  $R$ , è illimitata ossia che per ogni numero reale  $m > 0$  ( $m < 0$ ) esiste un numero reale  $p$  maggiore di  $m$  (minore di  $m$ ).

Per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali solo una delle seguenti eventualità è verificata:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b \quad (\text{proprietà di tricotomia})$$

Nell'insieme dei numeri reali<sup>3</sup> sono sempre possibili ed a risultato unico le quattro operazioni elementari - ad eccezione della divisione per zero - l'elevamento a potenza<sup>1</sup> e l'estrazione di radice ad eccezione del caso in cui il radicando è negativo e l'indice di radice è pari. Ad esempio, non hanno significato in  $R$  i seguenti simboli:

$$\frac{3}{0}, \sqrt{-4}$$

il primo esprime la divisione per zero (tre diviso zero), il secondo l'estrazione di radice di indice pari (2) e radicando negativo (-4).

www.matematicus.com

---

<sup>1</sup> La potenza  $x^\alpha$ , con  $x < 0$  ed  $\alpha \in R - Z$ , non è definita. Inoltre, non è definito il simbolo  $0^0$ .  
<sup>2</sup> Ulteriori importanti proprietà dei numeri reali sono descritte nel paragrafo 8 del capitolo VI.

## 2. Alcuni argomenti preliminari del calcolo numerico e letterale.

### a) Definizione di potenza con esponente intero positivo

Per ogni  $a \in R$  e  $n \in N$  si ha:

$$1] \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ - volte}},$$

L'operazione di elevamento a potenza di un numero reale  $a$  si può estendere anche al caso in cui l'esponente  $n$  è un numero reale qualsiasi.

In particolare si ha:

$$2] \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in N)$$

$$3] \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0, \quad m/n \in Q^+ \quad ^2$$

$$4] \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad a > 0, \quad m/n \in Q^+$$

### Proprietà delle potenze:

$\forall a, b, m, n \in R$  si ha:

$$1. \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2. \quad a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$3. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$4. \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$6. \quad (a)^n = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$$7. \quad (a)^0 = 1$$

**sempreché le suddette scritture abbiano senso.**

**Esempio 1.** Il lettore rifletta sulle seguenti uguaglianze e deduca le relative proprietà applicate:

$$(-3)^2 = 9, \quad (2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}, \quad 7^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^3}}$$

---

<sup>2</sup>Vedi paragrafo 7: I radicali.

### Errori da evitare

Sono errati i seguenti calcoli:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{3}}$$

L'errore consiste nel considerare una potenza il simbolo  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ , che invece non è definito.

**Esempio 2.** Il lettore deduca le proprietà delle potenze applicate nelle seguenti uguaglianze:

$$3^2 \cdot 3^8 = 3^{2+8} = 3^{10}, \quad 5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5, \quad \left[(5^7)^{23}\right]^0 = 1$$

### Osservazione 1

Analoghe regole valgono per il calcolo letterale.

$$a^2 \cdot a^8 = a^{2+8} = a^{10}, \quad b^4 : b^3 = b^{4-3} = b^1 = b, \quad \left[(a^7)^{23}\right]^0 = 1$$

**Esempio 3.** Semplificare la seguente espressione  $a^2 \cdot a^6 : a^2 + (a^5 a^3)^2$  applicando le proprietà delle potenze.  
Si ha

$$a^2 \cdot a^6 : a^2 + (a^5 a^3)^2 = a^{2+6} : a^2 + (a^{5+3})^2 = a^{8-2} + (a^8)^2 = a^6 + a^{16}$$

**b) Ordine di esecuzione delle operazioni.**

Per raggruppare un insieme di operazioni si usano le parentesi tonde, quadre e graffe:

(, [, { aperte; ), ], } chiuse.

Nei calcoli di espressioni numeriche o algebriche si eseguono sempre per prima le operazioni in parentesi tonde, poi quelle nelle parentesi quadre ed infine quelle nelle parentesi graffe.

Inoltre, in un'espressione in cui non figurano parentesi si eseguono le operazioni nell'ordine indicato se sono dello stesso grado<sup>3</sup>, mentre se non sono dello stesso grado si utilizza il seguente ordine:

1. potenze ed estrazioni di radice;
2. moltiplicazioni e divisioni;
3. addizioni e sottrazioni.

**Esempio 1.-** Calcolare il valore di:  $8 : 4 \times 7 + 5 \times 6 : 3$ .

Si ha:  $8 : 4 \times 7 + 5 \times 6 : 3 = 2 \times 7 + 30 : 3 = 14 + 10 = 24$ .

**Errori da evitare**

**E' errato invece:**  $8 : 4 \times 7 + 5 \times 6 : 3 = 8 : 28 + 5 \times 6 : 3 = \dots$

**Qual è l'errore?...Dai, è facile!**

**Esempio 2.-** Calcolare il valore di:  $3^2 \times 4 - 7 + 2 \times 3 + 4$

Si ha:  $3^2 \times 4 - 7 + 2 \times 3 + 4 = 9 \times 4 - 7 + 6 + 4 = 36 - 7 + 6 + 4 = 46 - 7 = 39$

**Errori da evitare**

**E' errato invece:**  $3^2 \times 4 - 7 + 2 \times 3 + 4 = 3^2 \times 4 - 7 + 2 \times 7 = \dots$

L'errore consiste nell'aver eseguito prima l'addizione  $3 + 4$  anziché la moltiplicazione  $2 \times 3$ . **In breve:** non abbiamo rispettato l'ordine di esecuzione delle operazioni.

<sup>3</sup> Sono, ad esempio, dello stesso grado la moltiplicazione e la divisione, mentre sono di grado diverso la potenza e la moltiplicazione oppure la divisione e la sottrazione.

**Esempio 3.-** Per  $x \neq 0$  calcolare:  $3x - \frac{1}{x} \cdot 5x^2$ .

Si ha:  $3x - \frac{1}{x} \cdot 5x^2 = 3x - 5x = -2x$

**Errori da evitare**

**E' errato invece:**  $3x - \frac{1}{x} \cdot 5x^2 = \left(3x - \frac{1}{x}\right)5x^2 = \dots\dots\dots$

**Esempio 4.-** Calcolare:  $3 + 6 \cdot 2 + 4 : 2 - 6^2$   
Solo una dei seguenti calcoli è corretto. Qual è?

- a)  $3 + 6 \cdot 2 + 4 : 2 - 6^2 = 9 \cdot 2 + 2 - 36 = 18 + 2 - 36 = 20 - 36 = -16$
- b)  $3 + 6 \cdot 2 + 4 : 2 - 6^2 = 3 + 12 + 4 : 2 - 36 = 19 - 36 = -17$
- c)  $3 + 6 \cdot 2 + 4 : 2 - 6^2 = 3 + 12 + 4 : 2 - 36 = 15 + 2 - 36 = 17 - 36 = -19$

Quali sono gli errori commessi?

**Esempio 5.-** Calcolare:  $5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2 + 10 : 2 + 4(1 + 3 \cdot 5)$   
Solo una dei seguenti calcoli è corretto. Qual è?

$$5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2 + 10 : 2 + 4(1 + 3 \cdot 5) = 15^2 + 12 + 5 + 4(4 + 5) = 225 + 17 + 4(9) = 225 + 17 + 36 = 278$$

$$5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2 + 10 : 2 + 4(1 + 3 \cdot 5) = 5 \cdot 9 + 12 + 5 + 4(1 + 15) = 45 + 17 + 4(16) = 45 + 17 + 64 = 126$$

**Esempio 6.-** Calcolare:  $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} \cdot \frac{13}{9}$ <sup>4</sup>

Solo una dei seguenti calcoli è corretto. Qual è?

a)  $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} \cdot \frac{13}{9} = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{13}{9} = \frac{12}{35} \cdot \frac{13}{9} = \frac{4}{35} \cdot \frac{13}{3} = \frac{52}{105}$

b)  $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} \cdot \frac{13}{9} = \frac{3}{5} : \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{13}{9}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{91}{36} = \frac{1}{5} \cdot \frac{91}{12} = \frac{91}{60}$

<sup>4</sup> Per le operazioni tra frazioni vedi paragrafo 7.

### c) Valore assoluto di un numero reale

Il valore assoluto di un numero reale  $a$  è definito nel seguente modo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Ricordiamo le seguenti proprietà del valore assoluto.

Per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  si ha:

1.  $|a| \geq 0$ ,  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
2.  $|a| + |b| \leq |a + b|$ ,
3.  $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ ,
4.  $a^2 = |a|^2 = |a^2|$ .

#### Esempio 1.

Il valore assoluto di  $|-3| = 3$ , il valore assoluto di  $|0| = 0$ , ed il valore assoluto di  $|\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

**Esempio 2.** Scrivere senza valore assoluto l'espressione: \*)  $|x + 2| - 6x$ .

Per scrivere l'espressione (\*) senza il valore assoluto conviene analizzare, al variare di  $x$ , il segno dell'argomento  $x + 2$ .

In base alla definizione di valore assoluto se l'argomento  $a = x + 2$  è positivo o nullo risulta  $|x + 2| = x + 2$  (in pratica si toglie il valore assoluto lasciando inalterato l'argomento); mentre se  $a = x + 2$  è negativo si ha  $|x + 2| = -(x + 2)$  (in pratica si toglie il valore assoluto e si cambia di segno l'argomento).

Pertanto si ha:

- per  $x + 2 \geq 0$  ossia per  $x \geq -2$  l'espressione data si può riscrivere nel seguente modo

$$|x + 2| - 6x = x + 2 - 6x = 2 - 5x$$

- per  $x + 2 < 0$  ossia per  $x < -2$  l'espressione data si può riscrivere nel seguente modo

$$|x + 2| - 6x = -(x + 2) - 6x = -x - 2 - 6x = -7x - 2$$

e riassumendo

$$|x + 2| - 6x = \begin{cases} 2 - 5x & \text{se } x \geq -2 \\ -7x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

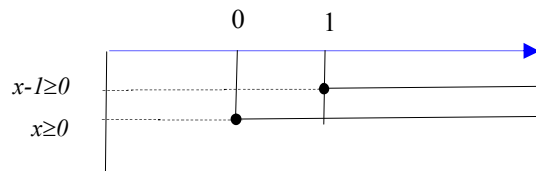
Aggiungiamo, ad esempio, che per  $x = -4$  l'espressione (\*) assume valore 26, mentre per  $x = 3$  assume valore -13:

$$[-7x - 2]_{x=-4} = -7(-4) - 2 = +28 - 2 = 26$$

$$[2 - 5x]_{x=3} = 2 - 5(3) = 2 - 15 = -13$$

**Esempio 3.** Scrivere senza valori assoluti l'espressione: \*)  $|x-1| - 3|x| - 3x$ .

Per scrivere l'espressione (\*) senza il valore assoluto conviene analizzare, al variare di  $x$ , il segno dell'argomento  $x-1$  e dell'argomento  $x$  e conviene costruire il seguente prospetto:



in cui si rappresenta che  $x-1$  è positivo (linea continua) per  $x > 1$ , nullo in  $x = 1$  e negativo altrimenti (linea tratteggiata); analoghe considerazioni valgono per  $x$ .

Quindi l'espressione (\*) si può riscrivere nel seguente modo:

$$x-1-3x-3x = -5x-1 \quad \text{per } x \geq 1$$

$$-(x-1)-3x-3x = -7x+1 \quad \text{per } 0 \leq x < 1$$

$$-(x-1)-3(-x)-3x = -x+1 \quad \text{per } x < 0$$

e riassumendo il tutto si può scrivere così::

$$|x-1| - 3|x| - 3x = \begin{cases} -5x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -7x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1. \\ -x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Aggiungiamo, ad esempio, che per  $x = -2$  l'espressione (\*) assume valore 3, per  $x = 5$  assume valore -26 e per  $x = 0$  assume valore 1.

$$|x-1| - 3|x| - 3x = [-5x-1]_{x=5} = -5x-1 = -5(5)-1 = -26$$

$$|x-1| - 3|x| - 3x = [-x+1]_{x=-2} = -(-2)+1 = 2+1 = 3$$

$$|x-1| - 3|x| - 3x = [-7x+1]_{x=0} = -7(0)+1 = 0+1 = 1$$

**d) Potenza di un binomio e di un trinomio.**

Ricordiamo che  $\forall A, B, C$  sussistono le seguenti identità:

1.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2.  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

3.  $(A + B)^4 = (A + B)^2(A + B)^2$

4.  $(A + B)^5 = (A + B)^2(A + B)^2(A + B)$

5.  $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

6.  $(A + B + C)^3 = (A + B + C)(A + B + C)^2$

**Suggerimento 2**

L'identità (6) suggerisce come calcolare la potenza di un qualsiasi binomio senza ricordare le identità 1, 2, ... ecc., ma soltanto la definizione di potenza. Ad esempio, come si ha:

$$7^5 = 7 \times 7^4 = 7 \times 7 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 7^2 = \dots$$

allo stesso modo si ottiene:

$$(A + B)^5 = (A + B)(A + B)^4 = \dots$$

**Esempio 1.-**

a)  $(2x - 3y)^2 = [2x + (-3y)]^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2;$

b)  $(-x - 2y)^3 = (-x)^3 + 3(-x)^2(-2y) + 3(-x)(-2y)^2 + (-2y)^3 =$   
 $-x^3 - 6x^2y - 12xy^2 - 8y^3$

c)  $(-x - 2y + 3z)^2 = [(-x) + (-2y) + (+3z)]^2 =$   
 $= (-x)^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2(-x)(-2y) + 2(-x)(3z) + 2(-2y)(3z) =$   
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$

### e) Prodotto tra due polinomi

Per moltiplicare due polinomi si moltiplica ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio quindi si riducono i termini simili.

**Esempio 1.** Eseguire la moltiplicazione  $-4x\left(\frac{1}{3}x^2 - 3xy + 4\right)$ .

Per moltiplicare il monomio  $-4x$  per il polinomio in parentesi tonda si moltiplica  $-4x$  per ogni termine del polinomio, ricordando di moltiplicare le parti numeriche con le ordinarie operazioni numeriche e le parti letterali con le regole delle potenze.

Si ha dunque:

$$-4x\left(\frac{1}{3}x^2\right) = -\frac{4}{3}x^2; \quad -4x(-3xy) = +12x^2y; \quad -4x(+4) = -16x$$

e cioè

$$-4x\left(\frac{1}{3}x^2 - 3xy + 4\right) = -\frac{4}{3}x^3 + 12x^2y - 16x$$

**Esempio 2.** Moltiplicare i seguenti polinomi  $P(x) = -2x - 5$ ,  $Q(x) = 3x - 5$

Si ha:

$$\begin{aligned} (-2x - 5)(3x - 5) &= (-2x)(3x) + (-2x)(-5) + (-5)(3x) + (-5)(-5) = \\ &= -6x^2 + 10x - 15x + 25 = -6x^2 - 5x + 25 \end{aligned}$$

**Esempio 3.** Moltiplicare i seguenti polinomi  $P(x) = -3x^2 + y/4$ ,  $Q(x) = 7x^3 + 3x^2y/5 - 2xy^2$ .

Si ha:

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(-3x^2 + \frac{y}{4}\right)\left(7x^3 + \frac{3x^2y}{5} - 2xy^2\right) = \\ &= -21x^5 - \frac{9}{5}x^4y + 6x^3y^2 + \frac{7}{4}x^3y + \frac{3}{20}x^2y^2 - \frac{1}{2}xy^3 \end{aligned}$$

**Esempio 4.** Moltiplicare i seguenti polinomi  $P(x) = 4x^2 - 2x - 3$ ,  $Q(x) = 3x - 5 + x^2$

Si ha:

$$P(x)Q(x) = (4x^2 - 2x - 3)(3x - 5 + x^2) = 12x^3 - 20x^2 + 4x^4 - 6x^2 + 10x - 2x^3 - 9x + 15 - 3x^2$$

da cui riducendo i termini simili si ottiene:

$$12x^3 - 20x^2 + 4x^4 - 6x^2 + 10x - 2x^3 - 9x + 15 - 3x^2 = 4x^4 + 10x^3 - 29x^2 + x + 15$$

---

<sup>5</sup> Per la somma tra frazioni vedi paragrafo 7.

**Osservazione**

Ricordiamo che due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale. Sono simili i seguenti monomi:

$$ab^3, -3ab^3, +4ab^3.$$

Pertanto, l'operazione  $ab^3 - 3ab^3 + 4ab^3$  si può eseguire nel seguente modo:

$$(1 - 3 + 4) ab^3 = 2ab^3$$

Non sono simili i seguenti monomi  $-6ab^4$  e  $5a^4b$  e quindi non si possono sommare. Pertanto l'operazione  $-6ab^4 + 5a^4b$  rimane così indicata, non potendosi eseguire.

Ricordiamo ancora che:

$$a + a = (1 + 1)a = 2a; \quad a + a \neq a^2$$

$$+ a - a = 0 \text{ (essendo monomi opposti)}$$

**Esempio 1.** Sommare i seguenti monomi  $-2a + \frac{1}{3}ab + 5a - \frac{2}{5}ab$

Ricordiamo che si possono sommare solo i monomi simili. Quindi, sommando  $-2a$  con  $+5a$  e  $+\frac{1}{3}ab$  con  $-\frac{2}{5}ab$ , si ha:

$$\begin{aligned} -2a + \frac{1}{3}ab + 5a - \frac{2}{5}ab &= (-2 + 5)a + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)ab = 3a + \left(\frac{5-6}{15}\right)ab = \\ &= 3a + \left(-\frac{1}{15}\right)ab = 3a - \frac{1}{15}ab \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> Per la somma tra frazioni vedi paragrafo 7.