

3. Disequazione algebrica di secondo grado

Indichiamo con Δ il discriminante dell'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ e con $x_1 \leq x_2$ le sue soluzioni.

Le soluzioni della disequazione algebrica di 2° grado nell'incognita x :

1) $Ax^2 + Bx + C > 0$ (forma canonica)

sono:

a) $x < x_1, x > x_2$ se $\Delta > 0, A > 0$;

b) $x_1 < x < x_2$ se $\Delta > 0, A < 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1 = x_2\}$ se $\Delta = 0, A > 0$;

d) $\forall x \in \{\emptyset\}$ se $\Delta = 0, A < 0$;

e) $\forall x \in \mathbb{R}$ se $\Delta < 0, A > 0$;

f) $\forall x \in \{\emptyset\}$ se $\Delta < 0, A < 0$;

Giova osservare che per risolvere una disequazione algebrica di 2° grado conviene prima determinare il $\Delta = b^2 - 4ac$, quindi, a secondo che sia positivo, negativo o nullo, determinare le soluzioni in base a quanto indicato nei punti (a)... (f), tenendo in ogni caso conto del segno del primo coefficiente A .

L'equazione associata $Ax^2 + Bx + C = 0$ deve essere, risolta solo nel caso il delta (Δ) sia positivo o nullo. Infatti, solo in tal caso l'equazione suddetta ammette soluzioni reali.

Ricordiamo che la scrittura $\forall x \in \{\emptyset\}$ indica che la disequazione non ammette soluzione (è impossibile), mentre la $\forall x \in \mathbb{R}$ scrittura indica che ogni numero reale è soluzione.

Inoltre, se l'equazione associata non ammette soluzione (caso $\Delta < 0$) non è detto che anche la disequazione non ammetta soluzioni [vedi punto (e)].

Osservazione 1

La disequazione $Ax^2 + Bx + C < 0$ è riconducibile alla (1) moltiplicando 1° e 2° membro per -1.

Esempio 7. Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 5x + 6 > 0$.

L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ammette $\Delta = 1 > 0, A = 1 > 0$ e soluzioni $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Pertanto (vedi caso a) le soluzioni della disequazione sono: $x < 2, x > 3$ (fig. 1).

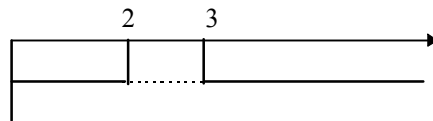


fig. 1

Esempio 8. Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 7x + 10 < 0$.

Moltiplicando 1° e 2° membro per -1 si ottiene la disequazione:

$$-x^2 + 7x - 10 > 0.$$

Osservato che l'equazione associata $-x^2 + 7x - 10 = 0$ ovvero $x^2 - 7x + 10 = 0$ ammette $\Delta = 9 > 0$ e soluzioni $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, si deduce, tenuto conto che è $A = -1 < 0$, (vedi caso b) che le soluzioni della disequazione (*) sono: $2 < x < 5$ (fig. 2).

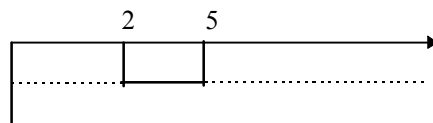


fig. 2

Esempio 9. Risolvere la disequazione: *) $x^2 + x + 1 > 0$.

Osservato che l'equazione associata ha delta negativo e che $A = 1 > 0$ si deduce (caso e) che la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $Ax^2 + Bx + C \geq 0$

sono:

- a') $x \leq x_1$, $x \geq x_2$ se $\Delta > 0$, $A > 0$;
- b') $x_1 \leq x \leq x_2$ se $\Delta > 0$, $A < 0$;
- c') $\forall x \in \mathbb{R}$ se $\Delta = 0$, $A > 0$;
- d') $\forall x \in \{x_1 = x_2\}$ se $\Delta = 0$, $A < 0$;
- e') $\forall x \in \mathbb{R}$ se $\Delta < 0$, $A > 0$;
- f') $\forall x \in \{\emptyset\}$ se $\Delta < 0$, $A < 0$;

Osservazione 2

La disequazione $Ax^2 + Bx + C \leq 0$ è riconducibile alla (2) moltiplicando 1° e 2° membro per -1.

Esempio 10. Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ammette $\Delta = 1 > 0$, $A = 1 > 0$ e soluzioni $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
Pertanto (vedi caso a') le soluzioni della disequazione sono: $x \leq 2$, $x \geq 3$ (fig. 3).

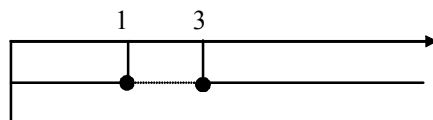


fig. 3

Esempio 11. Risolvere la disequazione: *) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

Moltiplicando 1° e 2° membro per -1 si ottiene la disequazione:

$$-x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

Osservato che l'equazione associata $-x^2 + 2x - 1 = 0$ ovvero $x^2 - 2x + 1 = 0$ ammette $\Delta = 0$ e soluzioni $x_1 = x_2 = 1$, si deduce, tenuto conto che $A = -1 < 0$, (vedi caso d') che le soluzioni della disequazione (*) sono: $\forall x \in \{1\}$.

Ulteriori esempi svolti

1. $3x^2 - 5x + 2 > 0$

$$3x^2 - 5x + 2 > 0 \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 1 > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2/3 \rightarrow x < 2/3, x > 1$$

2. $x^2 - 13x + 12 < 0$

$$x^2 - 13x + 12 > 0 \rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4(1)(12) = 121 > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 13x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 12 \rightarrow 1 < x < 12$$

3. $x^2 - 4x + 2 \leq 0$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0 > 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \rightarrow \forall x \in \{2\}$$

4. $x^2 + x + 1 \leq 0$

$$x^2 + x + 1 \leq 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 > 0 \rightarrow \forall x \in R$$

Disequazione razionale di secondo grado

$$ax^2 + bx + c > 0$$

↓

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ \text{se } a < 0 \end{cases}; \begin{cases} x < x_1, x > x_2 \\ \text{se } a > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\} \\ \text{se } a > 0 \end{cases}; \begin{cases} \forall x \in \{\emptyset\} \\ \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} \forall x \in \{\emptyset\} \\ \text{se } a < 0 \end{cases}; \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1, x = x_2$$

Disequazione razionale di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

↓

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ \text{se } a < 0 \end{cases}; \begin{cases} x \leq x_1, x \geq x_2 \\ \text{se } a > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } a > 0 \end{cases}; \begin{cases} \forall x \in \{\emptyset\} \\ \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0$$

Soluzioni

$$\begin{cases} \forall x \in \{\emptyset\} \\ \text{se } a < 0 \end{cases}; \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1, x = x_2$$

Esercizi proposti.

Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$,

b) $4x^2 - x + 5 < 0$,

c) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$,

d) $x^2 - 7x < 0$,

e) $9x^2 + 1 \geq 0$,

f) $7x^2 - 6x + 1 < 0$

g) $-x^2 - x - 1 < 0$

h) $25x^2 - 10x + 1 \leq 0$

i) $2x^2 - 7x \leq 0$

i) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x > 0$

l) $-\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2} > 0$

m) $8x^2 + 2 > 0$