

1. Equazioni algebriche di 1° grado.

La forma canonica di un'equazione algebrica di 1° grado, nell'incognita x, è:

$$1.1) \quad Ax + B = 0,$$

con A e B numeri reali o espressioni letterali¹.

RISOLUZIONE

Si perviene alla soluzione della (1.1) mediante i seguenti passaggi²:

$$Ax + B = 0 \Leftrightarrow Ax = -B \Leftrightarrow \frac{Ax}{A} = -\frac{B}{A} \Leftrightarrow x = -\frac{B}{A} \quad (A \neq 0)$$

Esercizi svolti.

N.1.- Risolvere le seguenti equazioni di 1° grado:

1) $4x + 5 = 0$, 2) $12x - 6 = 0$, 3) $13,23x - 7,2 = 0$, 4) $8x = 0$.

5) $-x = 1/7$ 6) $-\frac{1}{4}x = 2$

Risoluzione

1) $4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-5}{4} \Leftrightarrow x = -5/4$.

2) $12x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = 6/12 \Leftrightarrow x = 1/2$.

3) $13,32x - 7,2 = 0 \Leftrightarrow 13,32x = 7,2 \Leftrightarrow x = \frac{7,2}{13,32}^3 \Rightarrow x \approx 0,54$.

4) $8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{8} \Leftrightarrow x = 0$.

5) $-x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$

¹ Nel capitolo 2 consideriamo equazioni a coefficienti letterali.

² Vedi Appendice A

³ Si possono trasformare i numeri decimali in frazioni ed ottenere $x = 20/37$.

$$6) -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = 2 \times \frac{-4}{1} \Rightarrow x = -8$$

N.2.- Risolvere le seguenti equazioni intere di 1° grado:

1) $12x + 3x - 4 = 6x - 42 + 15x$,

2) $\frac{7}{12}x + \frac{x-4}{4} = 1 - \frac{1}{3}x$

3) $12\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{10}{3}(x+1) = 16\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2(x+3)$.

Risoluzione

1) Per risolvere l'equazione:

$$12x + 3x - 4 = 6x - 42 + 15x$$

trasportiamo tutti i termini al 1° membro, e si ha:

$$12x + 3x - 4 - 6x + 42 - 15x = 0;$$

sommiamo i termini simili, e si ottiene:

$$-6x + 38 = 0 \Leftrightarrow -6x = -38,$$

da cui si ha: $x = 19/3$.

OSSERVAZIONE 1

Per risolvere un'equazione intera a coefficienti interi di primo grado che non si presenta nella forma canonica si procede nel seguente modo:

1. si eseguono gli eventuali prodotti indicati;
2. si sommano i termini simili;
3. si risolve l'equazione canonica così ottenuta.

Per risolvere l'equazione

$$\frac{7}{12}x + \frac{x-4}{4} = 1 - \frac{1}{3}x$$

eliminiamo i denominatori moltiplicando 1° e 2° membro per il minimo comune denominatore (m.c.d. = 12), e si ha:

$$12\left(\frac{7}{12}x + \frac{x-4}{4}\right) = 12\left(1 - \frac{1}{3}x\right) \Leftrightarrow 7x + 3(x-4) = 12 - 4x.$$

Eseguiamo il prodotto indicato, e si ottiene:

$$7x + 3x - 12 = 12 - 4x \Leftrightarrow 7x + 3x - 12 - 12 + 4x = 0$$

ossia

$$14x - 24 = 0$$

Risolta quest'ultima equazione si vede che la soluzione è: $x = 12/7$.

3) Per risolvere l'equazione

$$12\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{10}{3}(x+1) = 16\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2(x+3)$$

eseguiamo i prodotti indicati, e si ha:

$$12x - 3 - \frac{10}{3}x - \frac{10}{3} = 16x + \frac{16}{3} - 2x - 6$$

eliminiamo i denominatori moltiplicando per il m.c.d. = 3, e si ottiene:

$$36x - 9 - 10x - 10 = 48x + 16 - 6x - 18.$$

Riducendo i termini simili si ha $-16x - 17 = 0$, ossia: $x = \frac{-17}{16}$.

OSSERVAZIONE 2

Per risolvere un'equazione intera a coefficienti fratti di primo grado che non si presenta nella forma canonica si procede nel seguente modo:

1. si eseguono gli eventuali prodotti indicati ;
2. si eliminano i denominatori moltiplicando primo e secondo membro per il minimo comune denominatore (m.c.d.);
3. si riducono i termini simili;
4. si risolve l'equazione canonica così ottenuta.

N.3.- Verificare che l'equazione seguente ammette la soluzione a fianco indicata:

$$\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}, \quad x=3.$$

Si sostituisce $x = 3$ nell'equazione data, e si ha

$$\frac{3(3)-2}{6} - \frac{4(3)+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2[(3)-3]}{4},$$

da cui eseguendo i calcoli indicati si ha:

$$\frac{9-2}{6} - \frac{12+1}{10} = -\frac{2}{15} - 0 \Rightarrow \frac{7}{6} - \frac{13}{10} = -\frac{2}{15} \Rightarrow -\frac{2}{15} = -\frac{2}{15}$$

Pertanto, essendo quest'ultima uguaglianza evidentemente vera si deduce che $x = 3$ è soluzione dell'equazione data.

N.4. - Verificare se la seguente equazione ammette la soluzione a fianco indicata:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}, \quad x=1.$$

Si sostituisce $x = 1$ nell'equazione data e si ha

$$\frac{1+1}{1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{(1)^2+1} \Leftrightarrow 2 - 1/2 = 1/2 \Leftrightarrow 2 = 1$$

Pertanto, essendo quest'ultima uguaglianza assurda, si deduce che $x = 1$ non è soluzione dell'equazione data.

N.5.- Risolvere le seguenti equazioni fratte di 1° grado:

1) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2+x},$

2) $\frac{5}{2x+1} - \frac{6}{4x^2-1} = -\frac{3}{2x-1},$

3) $\frac{x-1,3}{x+0,3} - \frac{x+0,3}{x-1,3} = \frac{0,09-1,69}{1,3x-1,69}$

$$4) \frac{x + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{x + \sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{x - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{x - \sqrt{2} - \sqrt{3}} - 2 = 0,$$

$$5) \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x},$$

$$6) \frac{2x - 1}{2x^2 - 3x} - \frac{5}{2x + 3} = \frac{7}{4x^3 - 9x} - \frac{3}{2x + 3}, \quad R : x = 1$$

$$7) \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{x^2 - x}}{x^2 - 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}, \quad R : x = \frac{1}{2}$$

$$x^3 - 2x^2 + x$$

Risoluzione

1) Per risolvere l'equazione

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + x}$$

fattorizziamo, preliminarmente, i denominatori, e si ha:

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

Quindi, eliminiamo i denominatori moltiplicando 1° e 2° membro per il m.c.d. = $x(x-1)(x+1)$. Osserviamo che affinché l'equazione assegnata esista bisogna imporre $x(x-1)(x+1) \neq 0$, il che equivale ad escludere che sia $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. Pertanto si ha:

$$x(x-1)(x+1) \left[\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right] = x(x-1)(x+1) \frac{1}{x(x+1)}$$

ossia:

$$x + 1 - x = x - 1$$

da cui riducendo i termini simili si ha $x = 2$.

OSSERVAZIONE 3

Per risolvere un'equazione fratta⁴ di primo grado si procede nel seguente modo:

1. si eseguono gli eventuali prodotti indicati ;
2. si eliminano i denominatori moltiplicando primo e secondo membro per il minimo comune denominatore (m.c.d.), avendo cura di imporre che il m.c.d. sia diverso da zero.
3. si riducono i termini simili;
4. si risolve l'equazione canonica così ottenuta.

2) Per risolvere l'equazione

$$\frac{5}{2x+1} - \frac{6}{4x^2-1} = -\frac{3}{2x-1}$$

fattorizziamo i denominatori e si ha:

$$\frac{5}{2x+1} - \frac{6}{(2x-1)(2x+1)} = -\frac{3}{2x-1}$$

Eliminiamo i denominatori moltiplicando 1° e 2° membro per il m.c.d. = $(2x+1)(2x-1) \neq 0$ il che equivale a $x \neq 1/2$ e $x \neq -1/2$. Pertanto si ha l'equazione:

$$5(2x-1) - 6 = -3(2x+1)$$

da cui eseguendo i prodotti indicati si ottiene:

$$10x - 5 - 6 = -6x - 3 \quad \text{ossia} \quad 16x - 8 = 0.$$

Quest'ultima equazione ammette per soluzione $x = 1/2$, ma tale soluzione non è accettabile dovendo essere $x \neq 1/2$. Pertanto l'equazione assegnata è impossibile.

⁴ Ricordiamo che un'equazione si dice fratta se l'incognita figura anche al denominatore.

3) Per risolvere l'equazione⁵

$$\frac{x-1,3}{x+0,3} - \frac{x+0,3}{x-1,3} = \frac{0,09-1,69}{1,3x-1,69}$$

fattorizziamo i denominatori, e si ha:

$$\frac{x-1,3}{x+0,3} - \frac{x+0,3}{x-1,3} = \frac{-1,6}{1,3(x-1,3)}$$

Eliminiamo i denominatori moltiplicando 1° e 2° membro per il m.c.d. = $1,3(x+0,3)(x-1,3) \neq 0$ il che equivale a $x \neq 0,3$ e $x \neq 1,3$. Pertanto si ha:

$$1,3(x-1,3)^2 - 1,3(x+0,3)^2 = -1,6(x+0,3)$$

da cui eseguendo i prodotti indicati si ottiene:

$$1,3(x^2 - 2,6x + 1,69) - 1,3(x^2 + 0,6x + 0,09) = -1,6x - 0,48$$

ossia:

$$1,3x^2 - 3,38x + 2,197 - 1,3x^2 - 0,78x - 0,117 = -1,6x - 0,48.$$

Infine, riducendo i termini simili si ottiene:

$$-2,56x + 2,56 = 0 \quad \text{ossia } x = 1.$$

La soluzione $x = 1$ è accettabile in quanto distinta da 1,3 e da 0,3.

4) Per risolvere l'equazione

$$\frac{x + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{x + \sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{x - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{x - \sqrt{2} - \sqrt{3}} - 2 = 0$$

eliminiamo i denominatori [

$$\text{m.c.d.} = (x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} - \sqrt{3}) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{3} - \sqrt{2}, x \neq \sqrt{3} + \sqrt{2}.]$$

⁵ Possiamo anche trasformare preliminarmente i numeri decimali in frazione e risolvere l'equazione così

$$\text{ottenuta: } \frac{x - \frac{13}{10}}{x + \frac{3}{10}} - \frac{x + \frac{3}{10}}{x - \frac{13}{10}} = \frac{\frac{9}{100} - \frac{169}{100}}{\frac{13}{10}x - \frac{169}{100}}$$

Pertanto si ha:

$$(x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - \sqrt{2} - \sqrt{3}) + (x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3}) - 2(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$$

da cui, eseguendo i prodotti indicati, si ha:

$$x^2 - 2 - 3 - 2\sqrt{6} + x^2 + x\sqrt{2} - x\sqrt{3} - x\sqrt{2} - 2 + \sqrt{6} + x\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3 - 2(x^2 - x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + x\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6} - x\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3) = 0$$

e riducendo i termini simili si ottiene:

$$-12 + 4x\sqrt{3} = 0 \quad \text{ossia } x = \sqrt{3} \quad (\text{accettabile}).$$

5) Per risolvere l'equazione

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x}$$

fattorizziamo, preliminarmente, i denominatori e si ha:

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x}$$

Eliminiamo i denominatori moltiplicando 1° e 2° membro per il m.c.d. = $x(x - 1)(x + 1) \neq 0$ ossia $x \neq 1$ e $x \neq -1$ e $x \neq 0$.

Pertanto si ha:

$$x + [-x(1 + x)] = x(x - 1) - 2(x^2 - 1)$$

da cui eseguendo i prodotti indicati, si ha:

$$x - x - x^2 = x^2 - x - 2x^2 + 2$$

e riducendo i termini simili si ottiene:

$$-x + 2 = 0 \quad \text{ossia } x = 2 \quad (\text{accettabile}).$$

2. Equazioni letterali e discussione.

Ricordiamo che nell'equazione:

$$1) \quad Ax = B$$

le lettere A e B possono rappresentare dei numeri reali o delle espressioni letterali, con la condizione che A non sia zero ($A \neq 0$).

In questo capitolo vogliamo esaminare il caso in cui A e B siano espressioni letterali.

In sostanza, sostituendo ad A e B delle espressioni letterali si ottengono delle equazioni letterali⁶:

per $A = a+1$, $B = b+a$ si ha l'equazione $(a+1)x = a+b$ con soluzione $x = \frac{a+b}{a+1}$, con la condizione che $a+1$ non sia zero, cioè a non sia -1 ($a \neq -1$).

La condizione $A \neq 0$ è essenziale affinché l'equazione (1) ammetta soluzione. Infatti, se sostituiamo $A = 0$ nella scrittura (1) si ha:

$$0x = B \quad \text{ossia} \quad 0 = B$$

e tale scrittura può essere vera o falsa.

Precisamente, è vera se scegliamo anche $B = 0$, ma è assurda se scegliamo $B \neq 0$.

Infatti, nel caso $B = 0$ diventa:

$$0 = 0$$

che è palesemente vero, mentre per $B = 7$, ad esempio, diventa:

$$0 = 7$$

che è palesemente falso.

Ora, se è $A \neq 0$ l'equazione (1) dicesi determinata e la sua soluzione è $x = \frac{B}{A}$, mentre se è $A =$

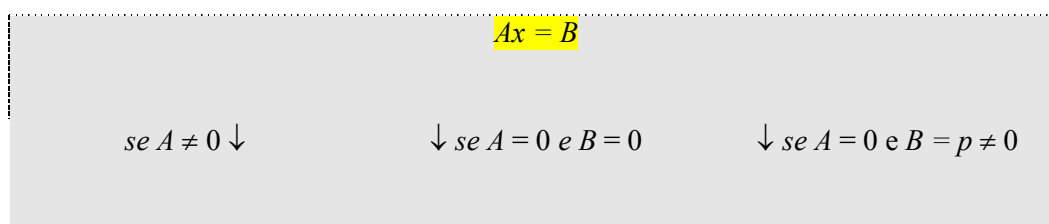
0 l'equazione può essere impossibile o indeterminata.

Precisamente, fermo restando $A = 0$, l'equazione (1) è impossibile se è $B \neq 0$, mentre è indeterminata se è $B = 0$.

Un'equazione (di primo grado) determinata ammette una sola soluzione, un'equazione indeterminata ammette infinite soluzioni, un'equazione impossibile non ammette soluzioni.

Discutere un'equazione di primo grado significa stabilire se ammette soluzioni (e se possibile determinarle) in relazione ai valori numerici assunti dai coefficienti A e B .

Ricapitolando si ha:



⁶ Ricordiamo che un'equazione si dice letterale se in essa figura almeno un'altra lettera diversa dall'incognita.

$$x = \frac{B}{A}, \text{ determinata}$$

$$0x = 0, \text{ indeterminata}^7$$

$$0x = p, \text{ impossibile}$$

Discutere un'equazione è particolarmente importante quando i coefficienti A e B dipendono da valori letterali.

www.matematicus.com

⁷ Alcuni autori dicono che l'equazione è un'identità o che si riduce a una identità.