Giulio D. Broccoli

.

Come determinare gli estremi superiore e inferiore di un insieme.

Massimi e minimi di un insieme.
Maggioranti e minoranti

36 esercizi svolti e 30 esercizi da svolgere

www.matematicaeliberaricerca.com

a) Massimi e minimi di un insieme

Definizione di massimo di un insieme.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di R. Un elemento $M \in A$ di dice massimo dell'insieme A se:

1) $x \leq M, \quad \forall x \in A$

Definizione di minimo di un insieme.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di R. Un elemento $m \in A$ di dice minimo dell'insieme A se:

2) $x \geq m, \quad \forall x \in A$

Osserviamo che:
1) Se un insieme A ammette minimo e massimo risulta
$m \leq M$, ove risulta $m = M$ se e solo se A è costituito da un sol elemento.
2) Se un insieme A ammette massimo M (minimo m) esso è unico.

Esempio 1. Sia A l'insieme {-1, 2, 3, 4}.
Il massimo di A è 4 e il minimo è -1. Scriveremo anche:

$$\max A = 4; \qquad \min A = -1$$

Esempio 2. Sia A = N, insieme dei numeri naturali.
Il massimo di A non esiste, mentre il minimo è 1. Osserviamo che qui con N indichiamo l'insieme dei numeri naturali escluso zero. Se invece si include lo zero il minimo di N è zero.

Esempio 3. Sia A = Q, insieme dei numeri razionali.
Non esiste né il massimo né il minimo di Q.

Esempio 4. Sia A l'intervallo chiuso [-2, 9].
Il massimo di A è 9 e il minimo è -2. Scriveremo anche:

$$\max A = 9; \qquad \min A = -2$$

Esempio 5. Sia A l'intervallo [-2, 9[chiuso a sinistra e aperto a destra.
Il massimo di A non esiste, il minimo è -2.
Si potrebbe essere indotti a pensare che 9 sia il massimo di A, ma si tratta di un grave errore. Infatti 9 non appartiene ad A.
Inoltre, il fatto che 9 non appartiene all'intervallo [-2, 9[implica che per quanto si cerchi un elemento di A più grande di tutti gli altri ne esiste sempre almeno un altro più grande.
Quest'ultima considerazione diventa evidente non appena si ricordi la definizione di intervallo [-2, 9[aperto a destra di R. In pratica, la struttura continua della retta reale, indotta sull'intervallo [-2, 9[permette l'avvicinamento indefinito all'estremo 9 dell'intervallo.

Esempio 6. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme $A = [-4, 7[\cup \{-8, 11\}$.
Il minimo è -8 e il massimo è 11.

Esempio 7. Sia A l'intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra $]-\infty, 1/5[$.
Non esiste né il massimo né il minimo di A.

Esempio 8. Sia $A =]-\infty, +\infty[$.
A coincide con l'insieme R dei numeri reali e non esiste né il massimo né il minimo di A.

Esempio 9. Sia A l'insieme $\{x \in R : x = 1/n, \forall n \in N\}$.
Il minimo di A non esiste, mentre il massimo è 1. Infatti, l'insieme A è costituito dagli elementi:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ 1/3,\ \tfrac{1}{4},\ 1/5,\ \ldots\ 1/n$$

E' errato pensare che lo zero sia il minimo di A, poiché lo zero non appartiene ad A.

Esempio 10. Sia A l'insieme $\{x \in R : x = n + 1/n,\ \forall\ n \in N\}$.
Il minimo di A è 2, mentre il massimo non esiste. Infatti, l'insieme A è costituito dagli elementi:

$x = 1 + 1/1 = 2$
$x = 2+1/2 = 5/2$
$x = 3+1/3 = 10/3$
…..
$x = n + 1/n$
…

$$2\ ,\ 5/2,\ 10/3,\ \ldots\ n + 1/n\ \ldots$$

ottenuti al variare di n in N.
Ne consegue che non esiste un elemento di A più grande di tutti gli altri. Infatti, per quanto si cerchi un elemento più grande di tutti se ne trova sempre un altro più grande.

Esempio 11. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme $A = B \cup C$, con $B = \{x \in R : x - 4 > 0\}$ e C $\{x \in R : x^2 - 1 \leq 0\}$

L'insieme B è costituito dai numeri reali $x>4$, come si vede risolvendo la disequazione $x - 4 > 0$, mentre l'insieme C è costituito dai numeri reali $-1 \leq x \leq 1$.
Quindi l'insieme A unione di B e C è costituito dai numeri reali tali che

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{oppure} \quad x > 4\ .$$

Ne consegue che il minimo di A è -1, mentre non esiste il massimo.

Esempio 12. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme $A = B \cap C$, con

$B = \{x \in R : x^2 - 9 > 0 \}$ e $C \{x \in R : x^2 - 16 \leq 0 \}$

L'insieme B è costituito dai numeri reali $x<-3$, $x>3$, come si vede risolvendo la disequazione $x^2 - 9 > 0$, mentre l'insieme C è costituito dai numeri reali $-4 \leq x \leq 4$. Quindi l'insieme A intersezione di B e C è costituito dai numeri reali tali che

$$-4 \leq x < -3 \quad \text{oppure} \quad 3 < x \leq 4 \quad .$$

Ne consegue che il minimo di A è -4, e il massimo è 4.

Esempio 13. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme $A = (B - C) \cap D$, con

$B = \{x \in R : x + 2 > 0 \}$,

$C = \{x \in R : 3x - 15 \leq 0 \}$ e $D = \{x \in R : 2x - 12 \leq 0 \}$

L'insieme A è costituito dai numeri reali $5<x\leq 6$. Ne consegue che A non ammette né minimo, mentre il massimo è 6.

b) Maggioranti e minoranti di un insieme

Definizione di maggiorante
Sia A un sottoinsieme non vuoto di R. Un numero reale p tale che:

$$p \geq x, \quad \forall x \in A$$

si dice un maggiorante per l'insieme A.

Definizione di minorante
Sia A un sottoinsieme non vuoto di R. Un numero reale q tale che:

$$q \leq x, \quad \forall x \in A$$

si dice un minorante dell'insieme A.
Evidentemente, se esiste un minorante (maggiorante) di un insieme A ne esistono infinti, tutti i numeri più piccoli di q (più grandi di p).
Un insieme che non ammette un maggiorante si dice illimitato superiormente, mentre se non ammette alcun minorante si dice illimitato inferiormente; si dice poi illimitato se non ammette né un maggiorante né un minorante. Per contro un insieme A si dice limitato se è limitato inferiormente e superiormente