# Algebra

## 1. Operazioni con le potenze

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^{m/p} = \sqrt[p]{a^m}$ ,

$a^{-m/p} = \dfrac{1}{\sqrt[p]{a^m}}$

## 2. Operazioni con le frazioni

$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm cb}{bd}$ (somma algebrica tra frazioni)

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (prodotto tra frazioni)

$\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ (rapporto tra frazioni)

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (potenza di una frazione)

## 3. Identità notevoli.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ , $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ,

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

$(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a+b+c)(a-b-c)$

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

$acx^2 + (ad+bc)x + db = (ax+b)(cx+d)$

$$x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ca+cb)x + abc = (x+a)(x+b)(x+c)$$

## 4. Operazioni tra radicali

- prodotto tra radicali

$$\sqrt[p]{a^n}\cdot\sqrt[q]{b^m} = \sqrt[pq]{\left(a^n\right)^q\left(b^m\right)^p}\;; \qquad \sqrt[p]{a^n}\cdot\sqrt[p]{b^m} = \sqrt[p]{\left(a^n\right)\left(b^m\right)}$$

- rapporto tra radicali

$$\sqrt[p]{a^n} : \sqrt[q]{b^m} = \sqrt[pq]{\left(a^n\right)^q : \left(b^m\right)^p}\,, \qquad \sqrt[p]{a^n} : \sqrt[p]{b^m} = \sqrt[p]{\left(a^n\right) : \left(b^m\right)}$$

- potenza di un radicale

$$\left(\sqrt[p]{a^n}\right)^m = \sqrt[p]{\left(a^n\right)^m}$$

- radice di radice

$$\sqrt[p]{\sqrt[r]{a^n}} = \sqrt[pr]{\left(a^n\right)}$$

- trasporto di un fattore positivo sotto il segno di radice

$$b\cdot\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[p]{\left(a^n\right)b^p} \quad se \quad b>0$$

- trasporto di un fattore positivo fuori dal segno di radice

$$\sqrt[p]{\left(a^n\right)b^m} = b^q\cdot\sqrt[p]{a^n b^r} \quad se \quad b>0 \quad e \quad m = qp + r$$

- alcuni casi di razionalizzazione

**a)** $\dfrac{m}{\sqrt{c}} = \dfrac{m\sqrt{c}}{c}$, **b)** $\dfrac{m}{\sqrt[p]{c}} = \dfrac{m\sqrt[p]{c}}{c}$,

**c)** $\dfrac{m}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \dfrac{m\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}{c-d}$, **d)** $\dfrac{m}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} = \dfrac{m\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)}{c-d}$

- radicale doppio o biquadratico

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$ **(conviene quando $a^2$ - $b$ è un quadrato perfetto).**

### 5. Definizione di logaritmo e proprietà.

Dato un numero reale positivo $a \neq 1$ e un numero reale positivo x si dice logaritmo di base a del numero x il numero reale y tale che:

2) $a^{y} = x$.

Per indicare che y è il logaritmo di x in base a si scrive:

3) $y = \log_a x$

La (3) si dice funzione logaritmo di base a e ha per dominio l'insieme $]\,0,+\infty\,[$ e per codominio l'insieme R dei numeri reali. Riportiamo il grafico della funzione logaritmo nelle figure 3 e 4.

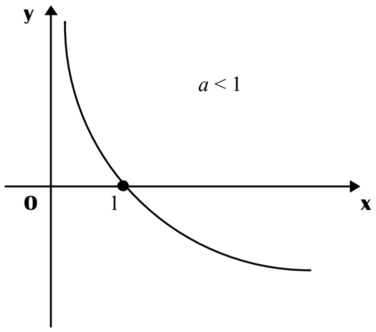


fig.3

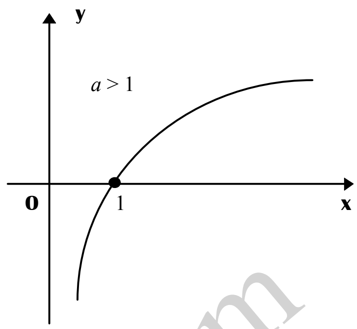


fig.4

Proprietà dei logaritmi.

4) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad , \quad x > 0, y > 0$

5) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad , \quad x > 0, y > 0$

6) $\log_a x^y = y \log_a x \quad , \quad x > 0$

7) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad , \quad x > 0$

8) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad a, b \in R^+ - \{1\}, \; x > 0$

9) $a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in \,]0,+\infty[$

10) $\log_a a^x = x \quad \forall x \in R$.

**6. Equazioni elementari. Teorema di Ruffini. Sistemi di equazioni.**

1) $ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0$

2) $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**Osservazione -**
Le equazioni algebriche di grado superiore al secondo si possono abbassare di grado utilizzando il seguente:

Teorema di Ruffini.
Un polinomio *P(x)* è divisibile per un binomio del tipo *x - c* se e solo se *P(c) = 0.*

3) $\quad \sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

4) $\quad \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = [g(x)]^3$

5) $\quad |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$

6) $\quad a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$

7) $\quad \log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$

8) $\quad \operatorname{sen} x = h \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcsen} h, \ x = \pi - \operatorname{arcsen} h, \quad \text{se } h \in [-1,1]$

9) $\quad \cos x = p \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos p, \ x = 2\pi - \arccos p, \quad \text{se } p \in [-1,1]$

10) $\quad tgx = q \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} q, \ x = \pi + \operatorname{arctg} p$

11) $\quad arcsen\, x = m \quad \Leftrightarrow \quad x = sen\ m, \quad \text{se } m \in [-\pi/2, \pi/2]$

12) $\quad arccos\, x = n \quad \Leftrightarrow \quad x = cos\ n, \quad \text{se } n \in [0, \pi]$

13) $\quad arc\ tg\, x = k \quad \Leftrightarrow \quad x = tg\ k, \quad \text{se } k \in [-\pi/2, \pi/2]$

14) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}; \quad y == \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$

15) $\begin{cases} ax + by = c \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = o \end{cases}$ **(Si applica il metodo di sostituzione)**

Si ricava $x = \dfrac{c - by}{a}$ ( o *y*) nell'equazione di 1° grado e si sostituisce in quella di 2° grado.
Quindi si risolve l'equazione di 2° grado in *y*:

***)** $$a\left(\frac{c-by}{a}\right)^2+by^2+c\left(\frac{c-by}{a}\right)y+d\left(\frac{c-by}{a}\right)+ey+f=0$$

Le soluzioni del sistema sono le coppie $\left(x_1=\dfrac{c-by_1}{a};y_1\right)$, $\left(x_{21}=\dfrac{c-by_2}{a};y_2\right)$ove $y_1$, $y_2$ sono le soluzioni dell'equazioni di (*).

**N.B. 1.** Ogni sistema di equazioni si può risolvere con il metodo di sostituzione. Anche i sistemi di tre o più equazioni in altrettante incognite si possono risolvere con tale metodo.

**7. Disequazioni elementari. Sistemi di disequazioni.**

- Disequazioni di 1° grado

1) $ax+b>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{b}{a},\quad \text{se } a>0;\quad x<-\frac{b}{a},\quad \text{se } a<0$

- Disequazioni di 2° grado

2) $$ax^2+bx+c>0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1<x<x_2 & \text{se } \Delta>0, a<0 \\ x<x_1,\ x>x_2 & \text{se } \Delta>0, \text{a}>0 \\ \forall x\in R-\left\{\frac{b}{2a}\right\} & \text{se } \Delta=0, a>0 \\ \varnothing & \text{se } \Delta=0, a<0 \\ \forall x\in R & \text{se } \Delta<0, a>0 \\ \varnothing & \text{se } \Delta<0, a<0 \end{cases}$$

**Nota 1**
La disequazione $ax^2+bx+c<0$ ( risp. $ax + b < 0$ )si può ricondurre alla (2) (risp. (1)) moltiplicando primo e secondo membro per -1.

**Nota 2**
La disequazione $ax^2+bx+c\geq 0$ equivale a risolvere $ax^2+bx+c>0$ e $ax^2+bx+c=0$
La disequazione $ax+b\geq 0$ equivale a risolvere $ax+b>0$ e $ax+b=0$.

- Sistemi di disequazioni

Per risolvere un sistema di due o più disequazioni si procede così:
1) si risolve singolarmente ogni disequazione del sistema;
2) le soluzioni del sistema sono i numeri reali che verificano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema.

- Disequazioni fratte (prodotto)

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

3') $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

4) $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 4') $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

5) $\frac{f(x)}{g(x)} > h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - h(x)g(x)}{g(x)} > 0$

La disequazione $f(x)g(x) > 0$ (risp. $f(x)g(x) < 0$) è equivalente alla (3) ( risp. (4)).

- Disequazioni irrazionali

5) $P(x) > \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow [P(x)]^n > Q(x)$ se $n$ è dispari

5') $P(x) > \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) \ge 0 \\ [P(x)]^n > Q(x) \end{cases}$ se $n$ è pari

6) $P(x) < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow [P(x)]^n < Q(x)$ se $n$ è dispari

6') $P(x) < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} P(x) \ge 0 \\ [P(x)]^n < Q(x) \end{cases}$ se $n$ è pari

- Disequazioni in valore assoluto

7) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -f(x) > g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$

7') $|x| > c \quad \Leftrightarrow \quad x < -c \quad \cup \quad x > c$ ; 7'') $|x| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < x < c$

7''') $|x| < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \varnothing$ ; $|x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in R - \{0\}$ ; $|x| \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in R$

8) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -f(x) < g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$

- Disequazioni esponenziali elementari

8) $A^x > B \quad \Rightarrow \quad x > \log_A B$ se $A > 1$

($A > 0, A \ne 1$)

8') $A^x > B \quad \Rightarrow$ ."*mi sa che devi vedere nel formulario*"

9) $A^x < B \quad \Rightarrow \quad x < \log_A B$ se $A > 1$,

*9')* $A^x < B \quad \Rightarrow$ ."*mi sa che devi vedere nel formulario*"

- Disequazioni esponenziali non elementari

10) $A^{f(x)} > A^{h(x)} \Rightarrow f(x) > h(x)$ se $A > 1$

10') $A^{f(x)} > A^{h(x)} \Rightarrow$ .”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

11) $A^{f(x)} < A^{h(x)} \Rightarrow f(x) < h(x)$ se $A > 1$

11') $A^{f(x)} < A^{h(x)} \Rightarrow$ .”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

- Disequazioni logaritmiche elementari

12) $\log_A x > B \Rightarrow x > A^B$ se $A > 1$,

$(A > 0,\ A \neq 1)$

12') $\log_A x > B \Rightarrow$ .”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

13) $\log_A x < B \Rightarrow x > A^B$ se $0 < A < 1$,

13') $\log_A x < B \Rightarrow$ .”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

- Disequazioni logaritmiche non elementari

14) $\log_A P(x) > \log_A Q(x) \Rightarrow \begin{cases} P(x) > Q(x) \\ P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$ se $A > 1$

14') $\log_A P(x) > \log_A Q(x) \Rightarrow$ .”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

- Disequazioni trigonometriche elementari

15) $\operatorname{sen} x > m$

ammette in $[0, 2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$\alpha < x < \pi - \alpha$ se $0 < m < 1$,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

$0 < x < \pi$ se $m = 0$;

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che $\operatorname{sen} \alpha = |m|$.

16) $\operatorname{sen} x < m$

ammette in $[\,0\,,\,2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$0 < x < \alpha\,,\ \pi - \alpha < x \le 2\pi$ se $0 < m < 1$,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

$\pi < x < 2\pi$ se $m = 0$;

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che sen $\alpha = |\,m\,|$ .

17) $\cos x > n$

ammette in $[\,0\,,\,2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$0 \le x < \alpha\,, 2\pi - \alpha < x \le 0$ se $0 < n < 1$,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

$0 \le x < \pi/2\,,\ 3\pi/2 < x \le 2\pi$ se $n = 0$

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che $\cos\alpha = |\,n\,|$ .

18) $\cos x < n$

ammette in $[\,0\,,\,2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$\alpha < x \le 2\pi - \alpha$ se $0 < n < 1$,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

$\pi/2 < x < 3\pi/2$ se $n = 0$;

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che $\cos\alpha = |\,n\,|$.

19) tg $x > p$

ammette in $[\,0\,,\,2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$\alpha < x < \pi/2,\quad \pi + \alpha < x < 3\pi/2$ se $p > 0$ ,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che tg $\alpha = |\,p\,|$ .

20) tg $x < p$

ammette in $[\,0\,,\,2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$0 \le x < \alpha\,,\ \pi/2 < x < \pi + \alpha\,,\ 3\pi/2 < x \le 2\pi$ se $p > 0$ ,

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che tg $\alpha = |\,p\,|$.

21) $\cot g\ x > q$

ammette in $[0, 2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$0 < x < \alpha$ , $\pi < x < \pi + \alpha$ se $q > 0$;

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”

ove in ogni caso $\alpha$ è l’angolo minimo tale che $\cot g\ \alpha = |\ q\ |$.

22) $\cot g\ x < q$

ammette in $[0, 2\pi]$ le seguenti soluzioni:

$\alpha < x < \pi$ , $\pi + \alpha < x < 2\pi$ se $q > 0$;

.”*mi sa che devi vedere nel formulario*”