

SECONDA PARTE

In questa seconda parte presentiamo lo studio di oltre 60 funzioni interamente svolte, e altre 140 che il lettore potrà studiare per esercizio.

Le funzioni sono presentate nel seguente ordine.

1. Funzioni razionali intere;
2. Funzioni razionali fratte;
3. Funzioni irrazionali;
4. Funzioni trigonometriche;
5. Funzioni esponenziali e logaritmiche;
6. Funzioni con il valore assoluto;
7. Grafici di ulteriori funzioni;
8. Metodo grafico.

Avvertiamo, infine, che talvolta i grafici delle funzioni non sono riprodotti in scala, cioè non sono rispettate esattamente le proporzioni tra i numeri.

1. Grafici di funzioni razionali intere.

N.1.- Studiare la funzione $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ e disegnarne il grafico.

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è razionale intera. Quindi il dominio è: C.E. = \mathbf{R}

Pertanto per stabilire il dominio di una funzione razionale intera non bisogna fare alcun calcolo, poiché il dominio di una tale funzione è sempre tutto l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali.

LIMITI E ASINTOTI

La curva non ammette asintoti, e tende a $+\infty$ o $-\infty$ al tendere di x all'infinito.

Precisamente si ha:

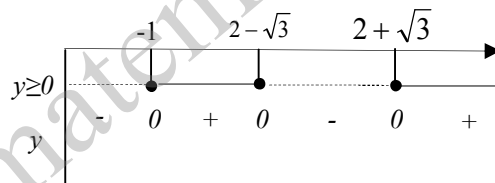
$$1] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n = a_n(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$2] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_nx^n = a_n(-\infty)^n$$

Quindi si può affermare che nel caso delle funzioni razionali intere il calcolo dei limiti si può trascurare, poiché a priori si riconosce il comportamento della funzione negli estremi del dominio.

POSITIVITÀ

$$y \geq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}, x \geq 2 + \sqrt{3}$$

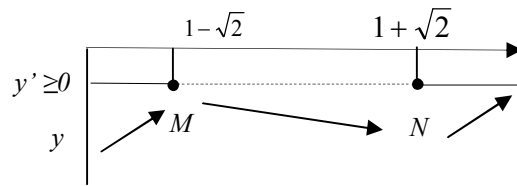


La curva interseca gli assi coordinati nei punti $(-1,0)$, $(2 - \sqrt{3},0)$, $(2 + \sqrt{3},0)$.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$$y' = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$$

$$y' \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{2}, x \geq 1 + \sqrt{2}$$



$$M(1 - \sqrt{2}; 4\sqrt{2} - 4) \quad N(1 + \sqrt{2}; -4\sqrt{2} - 4)$$

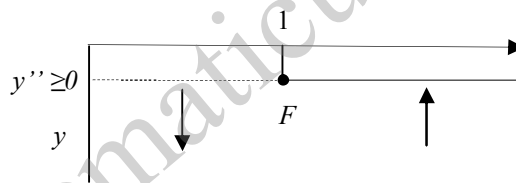
$$\begin{aligned} y(1 - \sqrt{2}) &= (1 - \sqrt{2})^3 - 3(1 - \sqrt{2})^2 - 3(1 - \sqrt{2}) + 1 = \\ &= 1 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6 - 3(1 - 2\sqrt{2} + 2) - 3 + 3\sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

$$y(1 + \sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 4$$

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' \geq 0 \Rightarrow 6(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$



La curva presenta un flesso nel punto $F(1; -4)$:

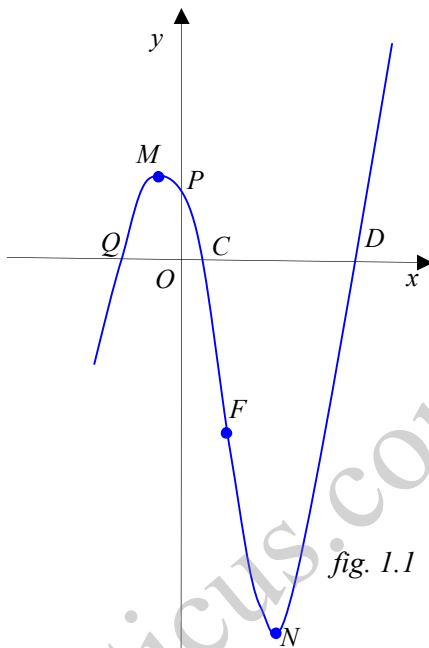
$$y(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 3(1) + 1 = -4.$$

INTERSEZIONE CON GLI ASSI

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0;1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = (x-1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1;0), C(2-\sqrt{3};0), D(2+\sqrt{3};0)$$

Il grafico della funzione è riportato nella figura 1.1



www.matematicus.com

N.3.- Studiare la funzione $y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$ e disegnarne il grafico.

CAMPO DI ESISTENZA

$$2x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{C.E.} = \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

SIMMETRIA

Risultando: $y = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{2x^2 - 1} = -y$, si deduce che la funzione è dispari. Pertanto ci

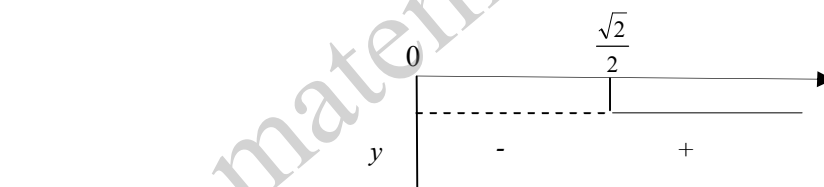
limitiamo a studiarla nell'intervallo $J = [0; +\infty[- \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Osservazione

Se $y = f(x)$ è una funzione dispari definita in D si ha:

1. se $f(x) > 0$ (risp. $f(x) < 0$) allora $f(-x) < 0$ (risp. $f(-x) > 0$);
2. $f'(-x) = -f'(x)$; ne consegue che se $x = c$ è un punto di massimo relativo $x = -c$ è di minimo relativo e viceversa.
3. $f''(-x) = -f''(x)$; ne deriva che se in $x = c$ il grafico della funzione è convesso in $x = -c$ è concavo e viceversa.

POSITIVITA'



$$y \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3}{2x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oppure} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

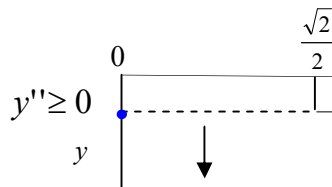
$$N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{8}\sqrt{6}\right), \text{ si ha: } y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{(\sqrt{6})^3}{8}}{3-1} = \frac{1}{8}6\sqrt{6} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{6}$$

Il punto $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$$y'' = \frac{2x(2x^2 - 3) + x^2 \cdot 4x - x^2(2x^2 - 3)[2(2x^2 - 1)4x]}{(2x^2 - 1)^4} = \frac{2x(2x^2 + 3)}{(2x^2 - 1)^3}$$

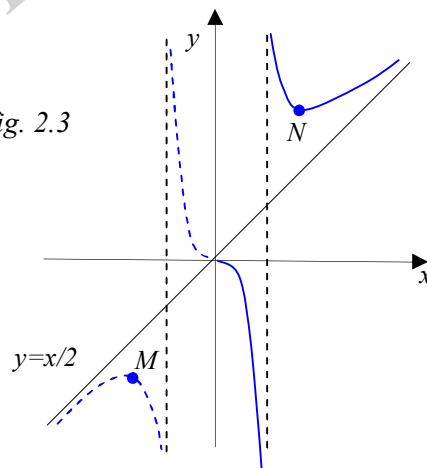
$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(2x^2 + 3)}{(2x^2 - 1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



L'unico punto di flesso è $x = 0$.

Il grafico della funzione è riportato nella figura 2.3 in cui abbiamo tracciato con tratto discontinuo la parte di grafico relativa a $x < 0$.

fig. 2.3



www.matematicus.com