

1. Coordinate cartesiane della retta e del piano. Coordinate polari.

1.1. - Riferimento cartesiano di una retta.

Un sistema di riferimento cartesiano di una retta r è costituito da un punto O di r , un verso v di r e da un segmento, non nullo, u detto unità di misura del riferimento (fig.1).

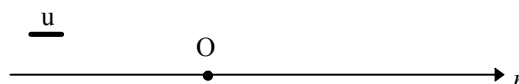


fig.1

Il punto O si dice origine del riferimento cartesiano, il verso di percorrenza sinistra-destra della retta (indicato dalla freccia) si assume come verso positivo, mentre quello opposto (destra-sinistra) come negativo.

Si dice ascissa x di un punto P (fig.2) di una retta , sulla quale sia fissato un riferimento cartesiano, la lunghezza del segmento di estremi O e P misurata rispetto ad u , presa con il segno $+$ (risp. $-$) se il punto P segue (risp. precede) O nel verso positivo.

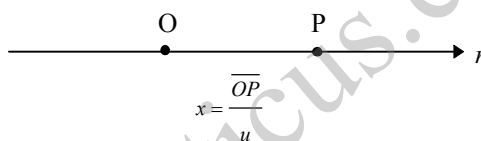


fig. 2

Per indicare che il numero reale x è l'ascissa del punto P si scrive $P(x)$.

L' ascissa del punto O è zero, tutti i punti a sinistra di O hanno ascissa negativa, mentre quelli a destra positiva.

Il punto U di ascissa $x = 1$ si dice punto unitario del riferimento cartesiano di una retta.

Infine, ricordiamo che mediante l'introduzione di un riferimento cartesiano su di una retta si istituisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali.

1.2. - Riferimento cartesiano di un piano. Coordinate polari.

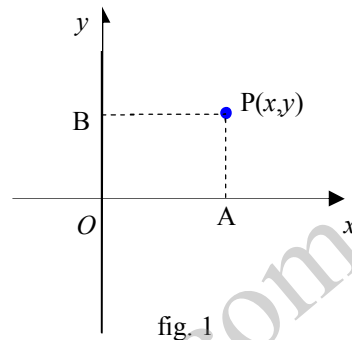
a) Riferimento cartesiano di un piano

Un sistema di riferimento cartesiano monometrico¹ ortogonale del piano, denotato con Oxy , è costituito da una coppia di assi x ed y perpendicolari tra loro nel punto O (detto origine del riferimento), e da un'unità di misura u .

Gli assi x ed y si dicono rispettivamente asse delle ascisse (o asse x) e asse delle ordinate (o asse y).

Si dice ascissa x (risp. ordinata y) di un punto P del piano, sul quale sia fissato un riferimento Oxy , la lunghezza del segmento (fig.1) aventi per estremi l'origine O e la proiezione del punto P sull'asse x (risp. y).

$$x = \frac{\overline{OA}}{u}, \left(\text{risp. } y = \frac{\overline{OB}}{u} \right)$$



Per indicare che il punto P ha coordinate cartesiane x ed y si scrive:

$$P(x; y) \quad \text{oppure} \quad P(x,y) \quad \text{oppure} \quad P \equiv (x; y).$$

Il riferimento Oxy divide il piano in quattro quadranti: i punti del 1° quadrante hanno coordinate positive, quelli del 3° negative, invece i punti del 2° (risp. 4°) quadrante hanno ascissa (risp. ordinata) negativa e ordinata (risp. ascissa) positiva. Le coordinate del punto O sono $(0;0)$, tutti i punti dell'asse x (risp. y) hanno ordinata (risp. ascissa) nulla.

Ricordiamo, infine, che mediante l'introduzione di un riferimento Oxy del piano si istituisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie di numeri reali.

b) Coordinate polari

Si dice sistema di coordinate polari o riferimento polare del piano l'insieme costituito da un punto O del piano (detto polo), una semiretta orientata x (detta asse polare) d'origine O , un'unità di misura u e un verso di rotazione v del fascio di semirette di centro O .

Si assume generalmente come positivo il verso di rotazione antiorario.

Si dicono coordinate polari di un punto P (distinto dal polo O)² del piano, in un sistema di coordinate polari (fig.2), la distanza ρ di P da O e l'angolo θ che la semiretta OP forma, rispetto al verso v , con l'asse polare. Per indicare che il punto P ha coordinate polari ρ, θ si scrive: $P(\rho, \theta)$.

Le coordinate polari ρ, θ si dicono rispettivamente modulo o raggio polare e argomento o anomalia di P . Le coordinate x, y cartesiane di un punto P , in un riferimento cartesiano associato al riferimento polare³, note che siano le coordinate polari, si ottengono mediante la seguente formula:

¹L'aggettivo "monometrico" sta a ricordare che l'unità di misura dell'asse x coincide con quella dell'asse y . Infatti si possono considerare anche riferimenti non monometrici ossia in cui l'unità di misura dell'asse x è distinta da quella dell'asse y .

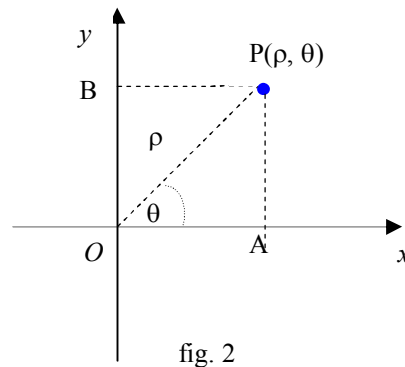
²Se il punto P coincide con O il modulo è zero mentre l'argomento è indeterminato.

³Si dice riferimento cartesiano Oxy associato al riferimento polare quello avente per origine il polo del riferimento polare, per asse x l'asse polare, per asse y quello ottenuto facendo ruotare l'asse polare in senso antiorario di un angolo retto e la stessa unità di misura u .

$$1.2.1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Le formule inverse sono:

$$1.2.2) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$



Osserviamo che l'argomento θ di un punto è determinato a meno di multipli interi di 2π e che si dice argomento principale la determinazione di θ tale che $0 \leq \theta < 2\pi$ ⁴.

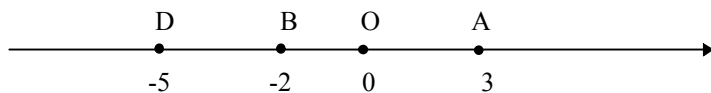
Se le coordinate x, y di un punto sono entrambe positive o la prima negativa e la seconda positiva l'argomento principale $\theta \in [0, \pi]$, mentre $\theta \in]\pi, 2\pi[$, se sono entrambe negative o la prima positiva e la seconda negativa.

⁴Generalmente si adotta che l'argomento principale $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1.3. Esercizi svolti.

N.1.- Segnare su una retta, sulla quale sia fissato un riferimento cartesiano i seguenti punti A(3), B(-2) e D(-5).

Fissato come unità di misura u il segmento "—", si ha:



N.2.- Segnare nel piano cartesiano Oxy i seguenti punti: A(2;3), B(3;0), C(-3;2) e D(-1;-1).

Fissata l'unità di misura u si ha la figura 1.

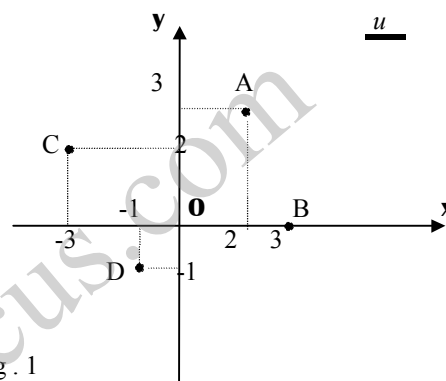


Fig. 1

NOTA 1.3.1

L'operatore può, di volta in volta, fissare arbitrariamente l'unità di misura u . Evidentemente, il disegno sarà tanto più ingrandito (risp. rimpicciolito) quanto più grande (risp. piccola) sarà scelta l'unità di misura.

N.3.- Determinare le coordinate polari del punto P avente in un riferimento associato le seguenti coordinate cartesiane (-1,1).

Applicando le formule (1.2.2) si ha: $\rho = \sqrt{2}, \operatorname{tg}\theta = -1$. Dalla seconda uguaglianza si ricava

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \quad \theta = \frac{7}{4}\pi.$$

Poiché il punto P appartiene al 2° quadrante si deduce che il valore accettabile di θ è il primo.

Pertanto il punto P ha le seguenti coordinate polari $\rho = \sqrt{2}, \theta = \frac{3}{4}\pi$.

N.4.- Siano $(1, \sqrt{3})$, $(-2, -2)$ e $(3, -\sqrt{3})$ le coordinate cartesiane rispettivamente dei punti P, Q e R. Determinare le coordinate polari di tali punti.

$$\text{Si ha: } P(2, \pi/3), Q\left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right), R\left(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

N.5.- Siano $(4, \pi/6)$ le coordinate polari di un punto. Determinare le sue coordinate cartesiane in un riferimento associato.

$$\text{Applicando le (1.2.1) si ha: } x = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}, \quad y = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2.$$

Pertanto le coordinate cartesiane del punto P sono: $(2\sqrt{3}, 2)$.

N.6.- Siano $(1, \pi/4)$, $(2, 0)$ e $(1/2, \pi)$ le coordinate polari dei punti A, B e C rispettivamente. Determinare le coordinate cartesiane di tali punti.

$$\text{Si ha: } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B(2, 0) \text{ e } C(-1/2, 0).$$

1.4. - Distanza tra due punti in un riferimento cartesiano.

a) La distanza tra due punti $T(x_1)$ e $S(x_2)$ di una retta r , sulla quale sia fissato un riferimento cartesiano, è data dalla seguente formula:

$$1.4.1) \quad \overline{TS} = |x_2 - x_1|.$$

o anche $\overline{TS} = x_2 - x_1$, ove x_2 è l'ascissa maggiore.

b) La distanza tra due punti $T(x_1, y_1)$ e $S(x_2, y_2)$ del piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (fig. 1), è data dalla seguente formula:

$$1.4.2) \quad \overline{TS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

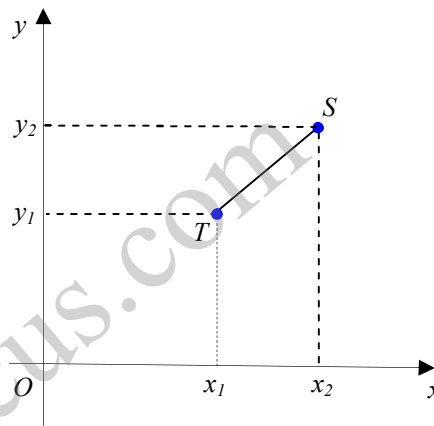


fig. 1

Casi particolari:

- Se i punti T ed S hanno la stessa ascissa, ossia se si trovano sulla stessa retta parallela all'asse y, la formula (1.4.2) si può scrivere nel seguente modo:

$$\overline{TS} = |y_2 - y_1|$$

o anche $\overline{TS} = y_2 - y_1$ ove y_2 è l'ordinata maggiore.

- Se i punti T ed S hanno la stessa ordinata, ossia se si trovano sulla stessa retta parallela all'asse x, la formula (1.4.2) si può scrivere nel seguente modo:

$$\overline{TS} = |x_2 - x_1|$$

o anche $\overline{TS} = x_2 - x_1$ ove x_2 è l'ascissa maggiore.

1.5. Esercizi svolti.

N.1.- Determinare la distanza tra le seguenti coppie di punti di una retta:

- a) A(8), B(13); b) T(-7), S(-5); c) P(1/3), R(-1/4).

Risoluzione

Applicando la (1.4.1) si ha:

a) $\overline{AB} = |13 - 8| = 5$ b) $\overline{TS} = |(-7) - (-5)| = |-7 + 5| = |-2| = 2$

c) $\overline{PR} = |1/3 - (-1/4)| = |1/3 + 1/4| = |7/12| = 7/12.$

N.2.- Dati i punti P(-5), Q(-1), C(7) e D(-8) calcolare il valore numerico della seguente espressione: $\overline{PQ} + \overline{PC} - \overline{QC} + \overline{PD} - \overline{CD}.$

Risoluzione

Calcolate le distanze \overline{PQ} , \overline{PC} , \overline{QC} , \overline{PD} , \overline{CD} si ha: $\overline{PQ} + \overline{PC} - \overline{QC} + \overline{PD} - \overline{CD} = -4.$

N.3.- Determinare la distanza tra le seguenti coppie di punti del piano:

- a) P(-1,-3), Q(1,5);
b) A(0,-2), B(3,-2);
c) C(7/3, 1/3), D(5/2, -1);
d) G(1/5, 0), H(3, 1/2).

Risoluzione

a) Applicando la formula (1.4.2) si ha:

$$\overline{PQ} = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [(+5) - (-3)]^2} = \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17};$$

b) $\overline{AB} = \sqrt{[0 - (3)]^2 + [-2 - (-2)]^2} = 3;$

c) $\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left[\frac{1}{3} - (-1)\right]^2} = \sqrt{(-1/6)^2 + (4/3)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{65};$

d) $\overline{GH} = \frac{1}{10}\sqrt{809}.$

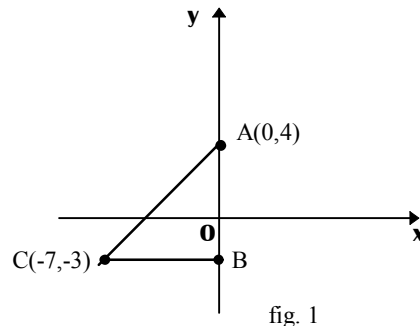
N.4.- Trovare il perimetro e l'area del triangolo di vertici A(0,4), B(0,-3) e C(-7,-3).

Il triangolo dato è rettangolo in B (fig.1), ed inoltre risulta:

$$\overline{AB} = 7,$$

$$\overline{BC} = 7,$$

$$\overline{AC} = 7\sqrt{2}$$



Pertanto si ha: $\text{Area}(\text{ABC}) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} = 49/2$ $\text{Perimetro}(\text{ABC}) = 7 + 7 + 7\sqrt{2} = 7(2 + \sqrt{2})$.

N.5.- Calcolare il perimetro dei triangoli aventi i seguenti vertici:

a) O(0,0), P(1,1/3), Q(-2,4/3);

b) P(1/5,1/5), Q(3/5,4/5), A(-3/5,-1/10).

Risoluzione

a) PERIMETRO (OPQ) = $\frac{2}{3}(2\sqrt{10} + \sqrt{13})$

b) PERIMETRO (PQA) = $\frac{2\sqrt{13} + \sqrt{73} + 15}{10}$.

N.6.- Determinare l'ordinata del punto R di ascissa $x = 6$ e che sia equidistante dai punti P(2;3) e Q(8;1).

Risoluzione

Denotiamo con y l'ordinata-incognita del punto R, e calcoliamo le distanze \overline{RP} e \overline{RQ} . Si ha:

$$\overline{RP} = \sqrt{(2-6)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{16 + (3-y)^2}, \quad \overline{RQ} = \sqrt{(8-6)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{4 + (1-y)^2}.$$

Di conseguenza, dovendo essere $\overline{RP} = \overline{RQ}$, si ha:

$$\sqrt{16 + (3-y)^2} = \sqrt{4 + (1-y)^2}$$

da cui, elevando al quadrato, si ottiene: $16 + (3 - y)^2 = 4 + (1 - y)^2 \Leftrightarrow y = 5$.
Quindi l'ordinata del punto R è $y = 5$.

N.7.- Calcolare l'ordinata del punto A, situato sull'asse delle y, equidistante dai punti B(1;1) e C(5;4).

Risoluzione

Il punto A ha coordinate (0; y) ove y rappresenta l'ordinata-incognita da calcolare. Calcolate le distanze:

$$\overline{AB} = \sqrt{1 + (1 - y)^2} \quad , \quad \overline{AC} = \sqrt{25 + (4 - y)^2}$$

dalla condizione di equidistanza del punto A dai punti B e C si ha l'equazione:

$$\sqrt{1 + (1 - y)^2} = \sqrt{25 + (4 - y)^2}$$

da cui si ricava che l'ordinata del punto A è $y = 13/2$.

N.8.- Determinare l'ascissa del punto A di ordinata $y = 11$ in modo che la sua distanza dal punto B(6;7) sia 5.

Risoluzione

Il punto A ha coordinate (x ; 11). La distanza \overline{AB} è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x - 6)^2 + (11 - 7)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + 16}.$$

Imponendo la condizione $\overline{AB} = 5$ si ha:

$$\sqrt{(x - 6)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow x = 3 \text{ oppure } x = 9.$$

Pertanto esistono due punti, tali da avere distanza al punto B uguale a 5, e sono: $A_1(3 ; 11)$ e $A_2(9 ; 11)$.

N.9.- Determinare l'ordinata del punto P(7 ; y) in modo che risulti $\overline{PA} = 3\overline{PB}$ con A(-5;4) e B(10;-1).

Risoluzione

Osservato che: $\overline{PA} = \sqrt{144 + (y - 4)^2}$, $\overline{PB} = \sqrt{9 + (y + 1)^2}$, per la condizione $\overline{PA} = 3\overline{PB}$ si ha:

$$\sqrt{144 + (y - 4)^2} = 3\sqrt{9 + (y + 1)^2}$$

Risolta quest'ultima equazione si vede che l'ordinata del punto P è $y = -5$ oppure $y = 7/4$.

N.10.- Determinare i punti P aventi ordinata ed ascissa uguale e tali che $\overline{PA} = \sqrt{13}$, con A(-4;1).

Risoluzione

Il punto P ha coordinate $(x; x)$ e la distanza \overline{PA} è: $\overline{PA} = \sqrt{(x+4)^2 + (x-1)^2}$.
Dalla condizione $\overline{PA} = \sqrt{13}$ si ha:

$$\sqrt{(x+4)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow x = -1 \text{ oppure } x = -2.$$

Quindi i punti che verificano il problema sono: $P_1(-1;-1)$ e $P_2(-2;-2)$.