PARTE PRIMA

Richiami di analisi matematica

I quesiti di matematica, assegnati alla maturità scientifica, che prenderemo in esame riguardano essenzialmente i seguenti problemi di analisi matematica[1]*:*

1. *Studio di una funzione reale y = f(x) e calcolo dell'area di una regione finita di piano;*
2. *Risoluzione di un problema di geometria piana o solida, ossia problemi di massimo e minimo;*
3. *Determinazione dell'equazione di un luogo geometrico.*

Nei numeri seguenti presentiamo alcuni metodi di analisi matematica che maggiormente intervengono nella risoluzione dei suddetti problemi, e la cui conoscenza è condizione essenziale per poterli risolvere.

1. Nozione di funzione. Studio del grafico di una funzione

a) Dicesi funzione definita in un insieme A e a valori in un insieme B ogni legge che associa ad un elemento $x \in A$ uno ed un sol elemento $y \in B$.
Per indicare che f è una funzione definita in A e a valori in B (fig. 1) si usa uno dei seguenti simboli:

$$f: x \in A \to f(x) \in B, \qquad f: A \to B, \qquad y = f(x)$$

L'insieme A si dice insieme di definizione, o dominio, o anche campo di esistenza della funzione f, x si dice variabile indipendente e $f(x)$ corrispondente, o trasformato, di x tramite f; mentre l'insieme $f(A) = \{y \in B: y = f(x)\}$ si dice codominio della funzione.

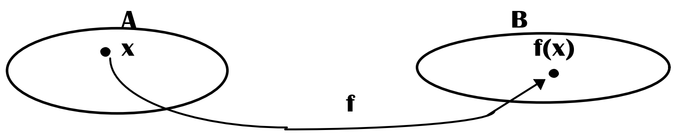

fig. 1

Se gli insiemi A e B coincidono con l'insieme dei numeri reali o con un suo sottoinsieme si dice che la funzione f è reale di variabile reale. Nel seguito considereremo soltanto funzioni reali di variabile reale.
Si dice grafico, o diagramma cartesiano di una funzione reale $y = f(x)$, definita nell'insieme $A \subseteq R$, l'insieme:

[1] Talvolta vengono proposti anche dei quesiti di analisi combinatoria o di matematica applicata alla fisica.

$$G(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \in A, y = f(x)\}$$

che rappresenta in un riferimento *Oxy* del piano un luogo geometrico d'equazione $y = f(x)$.
Osserviamo che la frase " una funzione $y = f(x)$ " equivale a dire una funzione il cui grafico ha equazione $y = f(x)$; un'altra locuzione corrente è " la curva d'equazione $y = f(x)$ ".
Una funzione reale $y = f(x)$, definita in $A \subseteq R$, si dice iniettiva se:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in A$$

mentre si dice suriettiva se: $\forall y \in R, \exists x \in A \; : \; y = f(x)$.
Una funzione che sia iniettiva e suriettiva si dice biettiva o invertibile; in tal caso ha senso considerare la funzione f^{-1}, inversa di f, definita in $f(A)$ e a valori in A.

b) Studio del diagramma di una funzione.
Studiare il grafico di una assegnata funzione reale di variabile reale $y = f(x)$ consiste nel tracciare il diagramma della funzione in un riferimento cartesiano del piano *Oxy*.
Ricordiamo che conviene affrontare il problema procedendo nel seguente modo:

- determinare l'insieme di definizione della funzione $y = f(x)$;
- stabilire se la funzione è pari, dispari o periodica;
- determinare la positività della funzione ossia l'insieme dei punti per i quali $f(x)$ è positiva, negativa o nulla;
- determinare i punti d'intersezione della funzione con gli assi coordinati;
- determinare gli eventuali asintoti;
- determinare gl'intervalli in cui la funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo;
- determinare gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa, gli eventuali punti di flesso.

Nei numeri 2,..,10 riteniamo utile ricordare al lettore le procedure atte a determinare gli elementi (dominio, asintoti, massimi e minimi, ecc.) necessari per tracciare il diagramma di una funzione; inoltre nei paragrafi 11 e 12, ricordiamo alcune ulteriori nozioni (calcolo di un'area, problemi di massimo e minimo, ecc.) che sovente vengono utilizzate nello svolgimento dei temi.

2. Calcolo di punti appartenenti al grafico di una funzione. Insieme di definizione di una funzione

a) Punti del grafico di una funzione.- Spesso si richiede di calcolare alcuni punti di una data funzione $y = f(x)$, ossia di calcolare i punti del piano cartesiano che appartengono alla curva grafico d'equazione $y = f(x)$.

Esempio 1.- Determinare il valore assunto dalla funzione $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ nei punti $x = 0$ e $x = 2$.
Risulta:

$$y(0) = \frac{1}{(0)^2 - 1} = -1, \qquad y(2) = \frac{1}{(2)^2 - 1} = 1/3$$

cioè la funzione y esiste nel punto $x = 0$ ed assume valore -1, nel punto $x = 2$ assume valore 1/3. Si suole dire anche che la curva γ d'equazione $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ passa per i punti di coordinate (0, -1) e (2, 1/3), o anche che tali punti appartengono a γ.

Esempio 2.- Calcolare la funzione $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$ nei punti $x = 3$ e $x = -2$.
Risulta:

$$y(3) = \frac{3+1}{(3)^2 - 4} = \frac{4}{5}, \qquad y(-2) = \frac{-2+1}{(-2)^2 - 4} = \frac{-1}{0} \quad \text{assurdo}$$

Pertanto la funzione y esiste per $x = 3$ ed assume valore 4/5, mentre nel punto $x = -2$ non esiste, ossia la curva grafico passa per il punto di coordinate (3, 4/5), mentre non interseca mai la retta d'equazione $x = -2$.

Esempio 3.- Verificare se i punti $P(1, -1)$, $Q(-2, 3)$, $O(0,0)$ e $R(-5, 0)$ appartengono alla curva γ d'equazione $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$.

Il punto $P(1, -1)$ appartiene alla curva γ perché le coordinate di P verificano l'equazione della curva. Infatti, sostituendo 1 a x e -1 a y in $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ si ottiene:

$$-1 = \frac{1}{(1)^2 - 2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Il punto $Q(-2, 3)$ non appartiene a γ perché $3 \neq \dfrac{1}{(-2)^2 - 2} = \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{1}{2}$.

Allo stesso modo si verifica che $O(0,0)$ appartiene alla curva γ mentre $R(-5, 0)$ non appartiene.

b) Determinazione del dominio di una funzione.

Si dice insieme di definizione, o dominio, o anche campo d'esistenza, di una funzione $y = f(x)$, l'insieme dei numeri reali x per i quali esiste $f(x)$.

Per stabilire il dominio di un'assegnata funzione occorre capire com'è "costruita" in relazione alle funzioni elementari.
Pertanto conviene procedere con gradualità, imparando a calcolare prima il dominio di funzioni razionali intere, poi delle funzioni razionali fratte, quindi delle funzioni irrazionali, successivamente passare alle funzioni trascendenti, ed infine al calcolo del dominio di una qualsiasi funzione.
Consigliamo quindi di procedere come nei righi seguenti:

1) Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n. La funzione:

$$y = P(x)$$

dicesi razionale intera di grado n, e il suo dominio è l'insieme R dei numeri reali.

Esempio 3.- Calcolare il dominio della funzione $y = x^4 + 5x^2 + 3$.

La funzione y è razionale intera. Pertanto il dominio è R.

Esempio 4.- Determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$.
La funzione y è razionale intera, e pertanto il suo dominio è R.

2) Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi a coefficienti reali di grado n e m rispettivamente. La funzione:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dicesi razionale fratta, e il suo dominio è l'insieme: $R - \{x \in R \ : \ Q(x) = 0\}$.
Pertanto, per calcolare il dominio di una funzione razionale fratta si può imporre $Q(x) = 0$, risolvere tale equazione, e dedurre che il dominio della funzione è l'insieme R privato delle eventuali soluzioni di tale equazione.
Si può anche imporre che il denominatore non si annulli, $Q(x) \neq 0$.

Esempio 5.- Calcolare il dominio della funzione $y = \frac{3x}{x+1}$.

L'equazione $x + 1 = 0$ ammette l'unica soluzione $x = -1$. Pertanto il dominio della funzione è l'insieme: R - {-1}. Si può anche scrivere $x + 1 \neq 0$ ossia $x \neq -1$, il che equivale ad affermare che i numeri per i quali la funzione esiste sono tutti i numeri reali tranne -1.

Esempio 6.- Stabilire il dominio della funzione $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}$.
Risolta l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si vede che il dominio della funzione y è l'insieme: R - $\{-2,2\}$.

Esempio 7.- Calcolare il dominio della funzione $y = \frac{x}{3x^2 + 7}$.

L'equazione $3x^2 + 7 = 0$ non ammette soluzioni reali, e pertanto il dominio della funzione è l'insieme R dei numeri reali.

3) Sia ora $x \to g(x)$ una funzione reale di variabile reale. La funzione:

$$y = \sqrt[n]{g(x)}$$

dicesi irrazionale, e il suo dominio è l'insieme $\{x \in R \ : \ g(x) \geq 0\}$ se n è pari, mentre coincide con il dominio della funzione $g(x)$ se n è dispari.

Esempio 8.- Calcolare il dominio della funzione $y = \sqrt{x - 1}$.

L'indice di radice è $n = 2$ (pari). Pertanto, bisogna richiedere che il radicando sia non negativo $g(x) \geq 0$. Risolta, quindi, la disequazione:

$$x - 1 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 1,$$

si vede che il dominio della funzione y è l'intervallo $D = [1, +\infty[$. Giova osservare che $\forall x \in D$ la funzione si può scrivere in forma di potenza con esponente fratto nel seguente modo: $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$.
Ne consegue l'identità:

$$\sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall x \in D.$$

Esempio 9.- Stabilire il dominio della funzione $y = \sqrt[4]{\frac{2x - 1}{x^2 + 1}}$.

L'indice di radice è $n = 4$ (pari), mentre la disequazione $\frac{2x-1}{x^2+1} \geq 0$ è verificata $\forall\ x \in [1/2, +\infty[$. Pertanto il dominio della funzione y è l'intervallo $[1/2, +\infty[$.

Esempio 10.- Calcolare il dominio della funzione $y = \sqrt[5]{x^2 - 1}$.

L'indice di radice è dispari ($n = 5$), mentre la funzione $g(x) = x^2 - 1$ è definita in tutto l'insieme dei numeri reali. Pertanto il dominio di y è R.
Giova osservare che la funzione si può scrivere in forma di potenza con esponente fratto solo per x variabile nell'insieme $J =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, cioè sussiste l'identità:

$$\sqrt[5]{x^2-1}=\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}$$

solo per $x\in\ ]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

Esempio 11.- Determinare il dominio della funzione $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2-9}}$.

L'indice di radice è dispari ($n = 3$), e la funzione $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$ è definita $\forall\ x\in$R -$\{\pm 3\}$.
Pertanto il dominio della funzione y è l'insieme R - $\{\pm 3\}$.

Esempio 12.- La funzione $y=+\sqrt{-x^2}$ ha per dominio $D = \{0\}$, poiché il radicale esiste solo per $x = 0$.