

# Matrici

## 1. Generalità

**a)** Si dice matrice a coefficienti reali di tipo  $[m, p]$  ogni tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

avente  $m$  righe e  $p$  colonne.

I numeri  $a_{ij}$  - con  $i = 1, 2, \dots, m$  ed  $j = 1, 2, \dots, p$  - sono gli elementi della matrice  $A$ ,  $i$  si chiama indice di riga e  $j$  indice di colonna. Una matrice si dice nulla se tutti i suoi elementi sono nulli.

Se  $p = 1$  la matrice ha un sola colonna e si indica con il simbolo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad (\text{si dice anche vettore colonna})$$

mentre se  $m = 1$  la matrice ha una sola riga e si indica con il simbolo:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1p}) \quad (\text{si dice anche vettore riga}).$$

Per indicare la generica riga della matrice (la riga  $i$ -sima) si usa il simbolo:

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}),$$

mentre per indicare la generica colonna (la colonna  $j$ -sima) si usa il simbolo:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

**Esempio 1.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$  possiede 3 vettori riga e quattro vettori colonna. Ad esempio la prima riga è il vettore  $(2 \ \frac{1}{3} \ 5 \ 7)$ , mentre la terza colonna è il vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

**b) Matrici subordinate ad una matrice**

Sia A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

di tipo  $[3,4]$ .

Consideriamo, ad esempio la seconda e la terza riga e la terza e quarta colonna. Gli elementi comuni ad una delle suddette righe e ad una delle suddette colonne, disposti come nella matrice A, formano la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

che si dice **subordinata della matrice A**.

La matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che si ottiene dalla matrice A cancellando le righe e le colonne che determinano B, si dice **matrice complementare** di B.

Considerando nella matrice A la prima e la terza riga e la seconda, terza e quarta colonna si ottiene la matrice subordinata:

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

la cui matrice complementare è: (1).

**c)** Una **matrice A si dice quadrata** se il numero delle sue righe è uguale al numero delle sue colonne ( $m = p$ ). Il tal caso il numero delle righe si dice ordine della matrice.

Nel caso che la matrice abbia due righe e due colonne si dice matrice quadrata o d'ordine 2.

Mentre se  $m > p$  si dice rettangolare alta e se  $m < p$  si dice rettangolare bassa.

**Esempio 1.** La matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 8 & -9 & 13 \\ 2 & \mathbf{7} & 0 & 14 \\ 3 & 1 & \mathbf{11} & 15 \\ 4 & -5 & 12 & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

è quadrata d'ordine 4 (cioè 4 righe e 4 colonne).

**d)** Si dice **diagonale principale** di una matrice quadrata la linea formata dagli elementi aventi indici di riga e di colonna uguale.

Ad esempio, nella matrice A dell'esempio 1 abbiamo evidenziato in grassetto gli elementi della diagonale principale. L'altra diagonale si dice secondaria.

**e)** Si dice **matrice diagonale** la matrice quadrata aventi nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice diagonale di ordine 4})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice diagonale d'ordine 2})$$

**f)** Si dice **matrice scalare** una matrice diagonale ed avente tutti gli elementi della diagonale principale uguale.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice scalare d'ordine 3})$$

**g)** Si dice **matrice unitaria** d'ordine  $m$ , e si indica con il simbolo  $I_m$ , una matrice quadrata diagonale d'ordine  $m$  avente gli elementi della diagonale principale sempre uguale all'unità.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice unitaria d'ordine 3})$$

**h)** Si dice **matrice triangolare alta** (bassa) la matrice quadrata avente tutti gli elementi al di sotto (al di sopra) della diagonale principale nulli.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice triangolare alta d'ordine 3})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice triangolare bassa d'ordine 4})$$

**i)** Si dice **matrice simmetrica** una matrice quadrata tale che gli elementi  $a_{ij} = a_{ji}$  per ogni  $i$  e  $j$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice simmetrica d'ordine 4})$$

Osserviamo esplicitamente che:

$$a_{21} = a_{12} = 3, \quad a_{31} = a_{13} = 0, \quad a_{41} = a_{14} = 0, \quad a_{32} = a_{23} = -1, \quad a_{42} = a_{24} = -5, \quad a_{43} = a_{34} = 2$$

**l)** Si dice **matrice antisimmetrica** una matrice quadrata avente tutti gli elementi della diagonale principale nulli e gli altri elementi tali che:  $a_{ij} = -a_{ji}$  per ogni  $i$  e  $j$ .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 7 & -3 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{è una matrice antisimmetrica d'ordine 4})$$

**m)** Si dice **trasposta di una matrice**  $A$ , e si indica con il simbolo  $A_t$  o con  $A_{-1}$ , la matrice ottenuta da  $A$  scambiando le righe con le colonne.

**Esempio 1.** La matrice trasposta della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  è  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Ricordiamo che:**

- $(A_t)_t = A$
- $(A + B)_t = A_t + B_t$  (vedi anche somma tra matrici)
- $(k \cdot A)_t = k \cdot A_t$  (vedi anche prodotto di uno scalare per una matrice)
- $(A \cdot B)_t = B_t \cdot A_t$  (vedi anche prodotto tra matrici)

- $A_t = A$  se  $A$  è una matrice simmetrica (e viceversa);
- $(-A_t) = A$  se  $A$  è una matrice antisimmetrica.

[www.matematicus.com](http://www.matematicus.com)

## Esercizi

**N.1.-** Riconoscere le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 41 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -41 & -1 & 0 & 1/3 \\ -5 & -3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Risulta:

- la matrice A è quadrata d'ordine 4, triangolare alta.
- la matrice B è rettangolare di tipo [3, 2], cioè tre righe e due colonne.
- la matrice C è quadrata d'ordine 3, simmetrica.
- la matrice D è quadrata d'ordine 4, antisimmetrica;
- la matrice E è quadrata d'ordine 3, triangolare bassa;
- la matrice F è quadrata d'ordine 3, scalare;
- la matrice G è quadrata d'ordine 4, non antisimmetrica ([Perché?](#))

**N.2.-** Calcolare per ogni matrice la subordinata in base a quanto a fianco indicato e la relativa complementare della subordinata.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{prima e seconda riga e prima e terza colonna;}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 5 & 9 \\ 1 & -7 & -\sqrt{2} & 19 \\ -1/4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{seconda riga e terza e quarta colonna;}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -x & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{prima riga e prima e quarta colonna.}$$

Risulta:

- la subordinata di A secondo la prima e seconda riga e la prima e terza colonna è la matrice nulla  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la cui complementare è  $O' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,
- la subordinata di B secondo la seconda riga e la prima e terza colonna è la matrice  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 19 \end{pmatrix}$ , la cui complementare è  $\begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$ .
- la subordinata di C secondo la prima riga e la prima e quarta colonna è la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -x \end{pmatrix}$ , la cui complementare è  $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

**N.3.-** Calcolare la trasposta delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & \sqrt{2} & 6 \\ 3 & x & 11 & 0 \\ 0 & 0 & y & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 5 & 9 \\ 1 & -7 & -\sqrt{2} & 19 \\ -1/4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Risulta:

- la trasposta di A è  $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & x & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 11 & y \\ -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- la trasposta di B è  $B_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1/4 \\ 1/4 & -7 & 0 \\ 5 & -\sqrt{2} & 8 \\ 9 & 19 & 1 \end{pmatrix}$

- la trasposta di C è  $C_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

## 2. Somma tra due matrici. Prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto tra matrici.

**a)** La somma tra due matrici  $A(a_{ij})$  e  $B(b_{ij})$  dello stesso  $[m,p]$  è una matrice  $C(c_{ij})$  di tipo  $[m,p]$  e i cui elementi sono dati dalla seguente formula:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p$$

cioè ottenuti sommando gli elementi che occupano posti omologhi nelle matrici A e B. Analogamente si procede per la differenza tra due matrici.

**Esempio 1.** La somma tra le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+3 & 0+(-8) \\ 0+3 & 2+(-1) & -10+(-1) \\ 0+(-5) & 0+7 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & -11 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esempio 2.** La differenza tra le matrici  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$  è la matrice

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 - (-1) & 2 - (-5) \\ -3 - (+4) & 0 - (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$

### Ricordiamo che:

L'insieme delle matrici di tipo  $[m,p]$  con l'operazione di somma costituisce un gruppo abeliano, il che equivale a dire che la somma tra matrici gode, quale che siano le matrici scelte, delle seguenti proprietà:

- $O + A = O = A + O$        $O$  è la matrice nulla e funge da elemento neutro
- $A + (B + C) = (A + B) + C$       Proprietà associativa
- $A + B = B + A$       Proprietà commutativa
- $A + (-A) = O = (-A) + A$       Esiste la matrice opposta,  $-A$ , di ogni matrice  $A$

### **b)** Prodotto di uno scalare per una matrice

Il prodotto tra la matrice  $A(a_{ij})$  di tipo  $[m,p]$  per uno scalare  $k$  (reale) è la matrice ottenuta moltiplicando per  $k$  tutti gli elementi della matrice A.

**Ricordiamo** che il prodotto di uno scalare per una matrice gode, qualunque siano le matrici A e B di tipo  $[m,p]$  e qualunque siano gli scalari  $k$  ed  $h$ , delle seguenti proprietà:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + h) \cdot A = kA + hA$
- $k(hA) = (kh)A$
- $1 \cdot A = A$

### Osservazione

La struttura algebrica avente come sostegno l'insieme delle matrici di tipo  $[m,p]$  come

operazione interna la somma tra matrici e come operazione esterna il prodotto di uno scalare per una matrice si chiama spazio vettoriale sul campo reale.

**Esempio 1.** Il prodotto tra il numero -1 e la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$  è la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{3} & -5 & -7 \\ -1 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & -6 & -8 & -11 \end{pmatrix} \text{ ottenuta moltiplicando per -1 tutti gli elementi di A.}$$

**Esempio 2.** Il prodotto tra il numero 3 e la matrice  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1/3 \\ 1/6 & -15 \end{pmatrix}$  è la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/2 & -5 \end{pmatrix} \text{ ottenuta moltiplicando per 3 tutti gli elementi della matrice B.}$$

### c) Prodotto tra due matrici

Siano  $A(a_{ij})$  e  $B(b_{ij})$  due matrici di tipo  $[m,p]$  e  $[p,q]$ , cioè tali che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B.

Si dice prodotto righe per colonne delle matrici A e B la matrice  $C(c_{ij})$  di tipo  $[m,q]$  seguente:

$$AB = C = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^p a_{1h} b_{h1} & \sum_{h=1}^p a_{1h} b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^p a_{1h} b_{hp} \\ \sum_{h=1}^p a_{2h} b_{h1} & \sum_{h=1}^p a_{2h} b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^p a_{2h} b_{hp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^p a_{mh} b_{h1} & \sum_{h=1}^p a_{mh} b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^p a_{mh} b_{hp} \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che il prodotto tra matrici gode della proprietà associativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma tra matrici, ma non della proprietà commutativa.

**Esempio 1.** Eseguire il prodotto tra le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

Il prodotto righe per colonne si può effettuare in quanto il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe B.

Gli elementi della matrice prodotto C, di tipo  $[2,2]$  cioè quadrata del secondo ordine, si ottengono nel seguente modo:

$$c_{11} = (2 \ 1 \ 0) \cdot (1 \ -2 \ 4) = 2 \cdot 1 + 1(-2) + 0(4) = 0 \quad \text{(prima riga per prima colonna)}$$

$$c_{12} = (2 \ 1 \ 0) \cdot (3 \ 7 \ 0) = 2 \cdot 3 + 1(7) + 0(0) = 13 \quad \text{(prima riga per seconda colonna)}$$

$$c_{21} = (4 \ -2 \ 1) \cdot (1 \ -2 \ 4) = 4 \cdot 1 + (-2)(-2) + 1(4) = 12 \quad \text{(seconda riga per prima colonna)}$$

$$c_{22} = (4 \quad -2 \quad 1) \cdot (3 \quad 7 \quad 0) = 4 \cdot 3 + (-2)(7) + 1(0) = -2 \quad (\text{seconda riga per seconda colonna})$$

Pertanto la matrice C è la seguente:  $C = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Esempio 2.** Eseguire il prodotto tra le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

Il prodotto righe per colonne si può effettuare in quanto il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe B.

Gli elementi della matrice prodotto C, di tipo [4,2] si ottengono nel seguente modo:

$$c_{11} = (1 \quad 2 \quad 3) \cdot (0 \quad 2 \quad 4) = 1 \cdot 0 + 2(2) + 3(4) = 16 \quad (\text{prima riga per prima colonna})$$

$$c_{12} = (1 \quad 2 \quad 3) \cdot (1 \quad 3 \quad 5) = 1 + 6 + 15 = 22$$

$$c_{21} = (4 \quad 5 \quad 6) \cdot (0 \quad 2 \quad 4) = 0 + 10 + 34$$

$$c_{22} = (4 \quad 5 \quad 6) \cdot (1 \quad 3 \quad 5) = 4 + 15 + 30 = 49 \quad (\text{seconda riga per seconda colonna})$$

$$c_{31} = (7 \quad 8 \quad 9) \cdot (0 \quad 2 \quad 4) = 0 + 16 + 36 = 52$$

$$c_{32} = (7 \quad 8 \quad 9) \cdot (1 \quad 3 \quad 5) = 7 + 24 + 45 = 76$$

$$c_{41} = (10 \quad 11 \quad 12) \cdot (0 \quad 2 \quad 4) = 0 + 22 + 48 = 70$$

$$c_{42} = (10 \quad 11 \quad 12) \cdot (1 \quad 3 \quad 5) = 10 + 33 + 60 = 103 \quad (\text{quarta riga per seconda colonna})$$

Pertanto la matrice C è la seguente:  $C = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 34 & 49 \\ 52 & 76 \\ 70 & 103 \end{pmatrix}$ .