Sessione ordinaria 1970

1 Verificare che le due curve piane, grafici cartesiani delle funzioni:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \qquad y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

hanno due punti in comune.
Indicare l'andamento dei predetti grafici cercandone in particolare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.
Determinare l'area della regione piana limitata dai due archi dei grafici aventi per estremi i due punti comuni.
Considerate poi le tangenti ai due grafici nei punti comuni, calcolare l'area del quadrilatero convesso da esse determinato.

Risoluzione

Per determinare le coordinate dei punti d'intersezione delle due curve occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x+1)^3 \\ 6(x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

e quindi l'equazione:

*] $\qquad x^2 + x = 0.$

Risolta l'equazione [*] si vede che i punti richiesti sono: $P(0,1)$, $Q(-1,0)$

Studio della prima curva
La curva γ d'equazione:

1] $\qquad y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

è definita in tutto l'insieme R dei numeri reali in quanto la funzione è razionale intera, e non presenta asintoti.
Risolvendo la disequazione:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 \geq 0$$

si vede che la [1] è positiva per $x > -1$, nulla per $x = -1$ e negativa altrimenti.

La derivata prima è:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$$

e la disequazione $y' \geq 0$ ossia $3(x+1)^2 \geq 0$ è verificata per $\forall x \in R$.
Pertanto la curva è crescente per $\forall x \in R$; nel punto $x = -1$, annullandosi la deriva prima, presenta un flesso a tangente orizzontale.

www.matematicus.com

La derivata seconda è:

$$y'' = 6(x+1)$$

e la disequazione $y'' \geq 0$ ossia $6(x+1) \geq 0$ è verificata per $x \geq -1$.
Quindi la curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse y per $x > -1$, nella direzione negativa dell'asse y per $x < -1$; $x = -1$ è un flesso: $F(-1,0)$.
Il grafico della funzione è accennato nella figura 1.

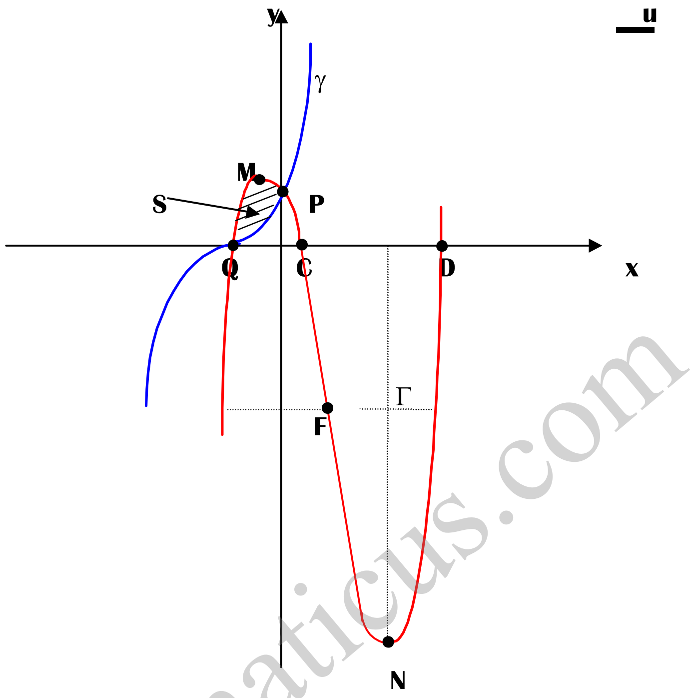


fig. 1

www.matematicus.com

Studio della seconda curva
La curva Γ d'equazione:

2] $$y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

è definita in tutto l'insieme R dei numeri reali in quanto la funzione è razionale intera, e non presenta asintoti.
Risolvendo la disequazione:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2 - 4x + 1) \geq 0$$

si vede che la [1] è positiva per $-1 < x < 2 - \sqrt{3},\ x > 2 + \sqrt{3}$, nulla per $x = -1,\ x = 2 - \sqrt{3},\ x = 2 + \sqrt{3}$ e negativa altrimenti.
La derivata prima è:

$$y' = 3(x^2 - 2x - 1)$$

e la disequazione $3(x^2 - 2x - 1) \geq 0$ è verificata per $x \leq 1 - \sqrt{2},\ x \geq 1 + \sqrt{2}$.

Pertanto la curva è crescente per $x \le 1-\sqrt{2}$, $x \ge 1+\sqrt{2}$ e decrescente altrimenti, presenta un massimo relativo M per $x = 1-\sqrt{2}$ e un minimo relativo N per $x = 1+\sqrt{2}$:

$$M\left(1-\sqrt{2}, 4\sqrt{2}-4\right), \qquad N\left(1+\sqrt{2}, -4\sqrt{2}-4\right)$$

La derivata seconda è:

$$y'' = 6(x-1)$$

e la disequazione $6(x-1) \ge 0$ è verificata per $x \ge 1$.
Quindi la curva volge la concavità nella direzione positiva dell'asse y per $x > 1$, nella direzione negativa dell'asse y per $x < 1$; $x = 1$ è un flesso a tangente obliqua: $F(1,-4)$.
Il grafico della funzione è accennato nella figura 1.

Calcolo dell'area racchiusa tra le due curve

L'area S del triangolo mistilineo (fig. 1) MPQ è data da:

$$S = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2 - 3x + 1)dx - \int_{-1}^{0} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx = -6\int_{-1}^{0} (x^2 + x)dx =$$

$$= -6\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 1.$$

Tangenti alle due curve nei punti comuni

La generica retta passante per il punto Q(-1,0) ha equazione:

3] $\qquad y = m(x+1)$

ed è tangente alla curva d'equazione [1] (risp. [2]) se:

$$m_1 = [y'(x)]_{x=-1} = \left[3(x+1)^2\right]_{x=-1} = 0, \quad \left(\text{risp. } m_2 = [y'(x)]_{x=-1} = \left[3(x^2 - 2x - 1)\right]_{x=-1} = 6\right)$$

Pertanto l'equazione della tangente t (risp. t') alla curva [1] (risp. [2]) nel punto Q è:

4] $\quad y = 0$, $\qquad$ (risp. $\quad$ [5] $\quad y = 6x + 6$ $\quad$)

Analogamente si vede che le equazioni delle tangenti r e r' alle due curve nel punto $P(0,1)$ sono:

6] $\quad y = 3x + 1$, $\qquad$ [7] $\quad y = -3x + 1$.

Calcolo dell'area del quadrilatero determinato dalle tangenti

Il quadrilatero convesso determinato dalle tangenti alle due curve nei punti $P(0,1)$ e $Q(-1,0)$ ha per vertici i punti P, R, Q, T (fig. 2), ove R è il punto d'intersezione delle rette t' e r', e T delle rette t e r.
Le coordinate del punto R, ottenute risolvendo il sistema formato dalle equazioni [5] e [7], sono (- 5/9 ; 8/3); mentre quelle del punto T, ottenute mettendo a sistema le [4], [6], sono (-1/3,0). L'area del quadrilatero $QTPR$ può essere calcolata nel seguente modo:

$$S(QTPR) = S(QRT') - S(TPT').$$

www.matematicus.com

Pertanto, osservato che:

$$S(QRT') = \frac{\overline{QT'} \cdot \overline{R'O}}{2} = \frac{16}{9}, \qquad S(TPT') = \frac{\overline{TT'} \cdot \overline{PO}}{2} = \frac{1}{3}$$

si ottiene:

$$S(QRTP) = \frac{16}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$$

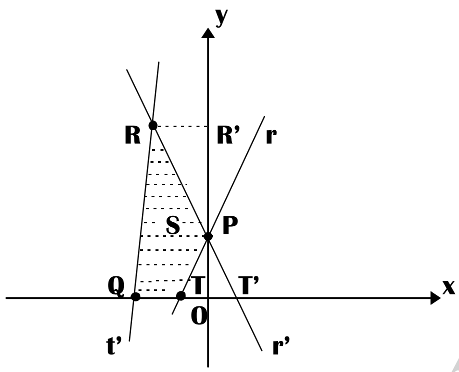


fig. 2

www.matematicus.com

Sessione ordinaria 1971

1 E' dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $tg\frac{x}{2}=t$, si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di t così ottenuta.

2 Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

3 Si studi il grafico della funzione:

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,2x$$

nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

4 Considerata la generica parabola di equazione:

$$x = ay^2 + by + c$$

si determino i coefficienti a, b, c in modo che essa passi per i punti (-6,0), (0,2), (0,6); indi si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

www.matematicus.com

Risoluzione del 1° quesito

Applicando ai triangoli rettangoli (fig. 1) HOB, HOA e OAB le relative relazioni tra lati ed angoli si ha:

$$\overline{OA} = \frac{h}{\mathrm{sen}\,x}, \quad \overline{OB} = \frac{h}{\cos x}, \quad \overline{BA} = \frac{\overline{OB}}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{h}{\mathrm{sen}\,x\cos x}$$

con $0 < x < \pi/2$.

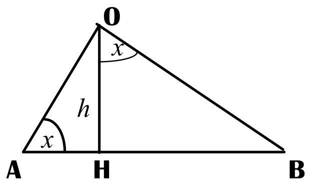


fig. 1

Quindi il perimetro P del triangolo AOB è dato da:

1] $$P = \frac{h}{\mathrm{sen}\,x} + \frac{h}{\cos x} + \frac{h}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = h\left(\frac{\cos x + \mathrm{sen}\,x + 1}{\mathrm{sen}\,x\cos x}\right)$$

Di conseguenza, tenuto conto che:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad (\text{ con } tg\frac{x}{2} = t\,)$$

dalla [1] si ottiene:

$$P = h\left(\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right) = h\left(\frac{\frac{1-t^2+2t+1+t^2}{1+t^2}}{\frac{2t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}}\right) = h\left[\frac{2t+2}{1+t^2}\frac{\left(1+t^2\right)^2}{2t\left(1-t^2\right)^2}\right] =$$

$$= h\frac{(t+1)(t^2+1)^2}{t(1-t^2)(1+t^2)} = h\frac{(t+1)(1+t^2)}{t(1-t^2)}$$

Pertanto la funzione da studiare è:

2] $$y(t) = h\frac{(t+1)(1+t^2)}{t(1-t^2)} = h\frac{t^2+1}{t(1-t)} \qquad (\text{ con } h>0\ )$$

ove, essendo $tg\frac{x}{2} = t$, il dominio della funzione *y (t)* è l'intervallo aperto]0 ,1[.
Nel seguito studieremo la funzione [2] per *t* variabile in tutto l'insieme dei numeri reali, salvo poi tracciare a tratto continuo il diagramma della funzione corrispondente all'intervallo]0, 1[e a tratto discontinuo quello relativo all'insieme R -]0, 1[.
Il dominio della funzione [2] è l'insieme R - {0,1,-1}, come si vede imponendo $t(t-1) \neq 0$, e tenendo conto della semplificazione per $t+1 \neq 0$.
Per determinare la positività della funzione [2] risolviamo la disequazione:

$$h\frac{t^2+1}{t(1-t)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t\,(t-1) > 0$$

da cui si evince che la funzione è positiva per $0 < t < 1$ e negativa altrimenti.
Per quanto riguarda il comportamento della funzione agli estremi del dominio si ha:

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty; \qquad \lim_{t\to 1^-} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to 1^+} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t\to -\infty} y(t) = -h, \quad \lim_{t\to +\infty} y(t) = -h,$$

cioè le rette $t = 0$ e $t = 1$ sono degli asintoti verticali per il diagramma della funzione, mentre la retta $y = -h$ è un asintoto orizzontale; inoltre risulta: $\lim_{t\to -1} y(t) = -h$.

La derivata prima è:

4] $$y' = h\frac{t^2+2t-1}{t^2(1-t)^2}$$

e la disequazione $y' \geq 0$, ossia $t^2 + 2t - 1 \geq 0$ è verificata per $t \leq -1-\sqrt{2},\ t \geq -1+\sqrt{2}$

www.matematicus.com

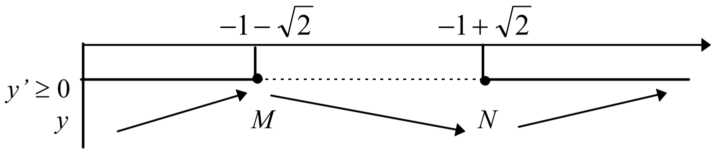
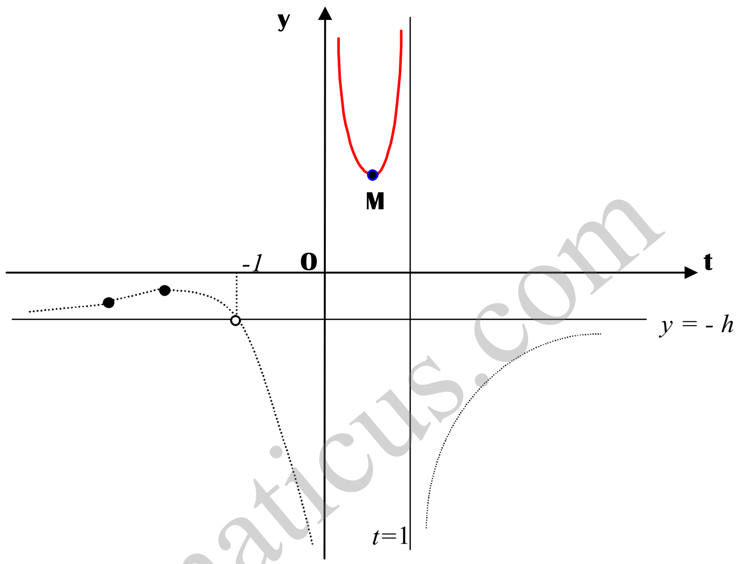


fig. 2

Pertanto la [2] è crescente per $t \leq -1-\sqrt{2}$, $t \geq -1+\sqrt{2}$ e decrescente altrimenti (fig. 2); inoltre presenta un punto di massimo relativo M per $t=-1-\sqrt{2}$ e un punto di minimo relativo N per $t=-1+\sqrt{2}$: $M\left(-1-\sqrt{2}\,;2h(1-\sqrt{2}\right)$, $N\left(-1+\sqrt{2}\,;2h(1+\sqrt{2}\right)$.



www.matematicus.com

La derivata seconda è:

$$y'' = \frac{-2t(t-1)(t^3+3t^2-3t+1)}{t^4(1-t)^4} = \frac{2(t^3+3t^2-3t+1)}{t^3(1-t)^3}$$

e l'equazione di terzo grado $y'' = 0$, ossia $t^3+3t^2-3t+1=0$[1] ammette la soluzione reale $x \approx -3{,}85$, che è l'ascissa di un punto di flesso della funzione.
Dagli elementi acquisiti si deduce che il diagramma della funzione è quello accennato nella figura 3.

[1]Vedi Osservazione 1 della nota N.13.

Risoluzione del 2° quesito

Sia ABC il triangolo (fig. 1) isoscele sulla base AC inscritto nel cerchio di raggio r e centro O. Posto $\overline{OH} = x$, con la condizione $-r \leq x \leq r$, si ottiene:

$$\overline{BH} = \overline{BO} + \overline{OH} = r + x.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHA si ha:

$$\overline{AH} = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \overline{AC} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\overline{OA} = r$$

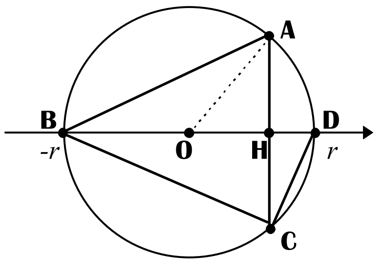


fig. 1

Giova osservare che per $x = r$ si ha $H \equiv D$ e $\overline{BH} = 2r$, $\overline{AC} = 0$; mentre per $x = -r$ si ha $H \equiv B$ e $\overline{BH} = 0$, $\overline{AC} = 0$.

Quindi la funzione di cui ricercare il massimo, $y = \overline{BH} + 2\overline{AC}$, è:

1] $$y = r + x + 4\sqrt{r^2 - x^2}$$

definita in $-r \leq x \leq r$.

Ricordiamo che condizione sufficiente affinché la [1] abbia in un punto $x = c$ un massimo relativo è che $y'(c) = 0$, $y''(c) < 0$. Pertanto, osservato che:

$$y' = \frac{\sqrt{r^2 - x^2} - 4x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad y'' = \frac{-4r^2}{\sqrt{\left(r^2 - x^2\right)^3}},$$

e dall'essere:

$$y' = 0 \iff \sqrt{r^2 - x^2} - 4x = 0 \Rightarrow r^2 - x^2 = 16x^2 \iff x = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}r,$$ [1]

[1] La soluzione $x = -\frac{\sqrt{17}}{17}r$ non è accettabile perchè non verifica l'equazione irrazionale.

www.matematicus.com

$$y''\left(\frac{\sqrt{17}}{17}r\right)=\frac{-4r^2}{\sqrt{\left[r^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{17}r\right)^2\right]^3}}<0$$

si deduce che per $x=\frac{\sqrt{17}}{17}r$ la [1] presenta un massimo relativo, e tenuto conto che:

$$y(-r)=0, \quad y(r)=2r \quad < \quad y\left(\tfrac{\sqrt{17}}{17}r\right)=r(1+\sqrt{17})$$

si evince che il massimo è assoluto.

In definitiva il triangolo richiesto è quello avente altezza $\overline{BH}=r+\frac{\sqrt{17}}{17}r=\frac{r}{17}\left(17+\sqrt{17}\right)$ e base $\overline{AC}=2\sqrt{r^2-\left(\frac{r\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\frac{8r\sqrt{17}}{17}$.

www.matematicus.com

Risoluzione del 3° quesito

La funzione:

1] $$y = 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x$$

è definita in tutto R ed è periodica di periodo $p = 2\pi$.

…. E qui mi sa che devi continuare da solo … facendo un utile esercizio!

www.matematicus.com